

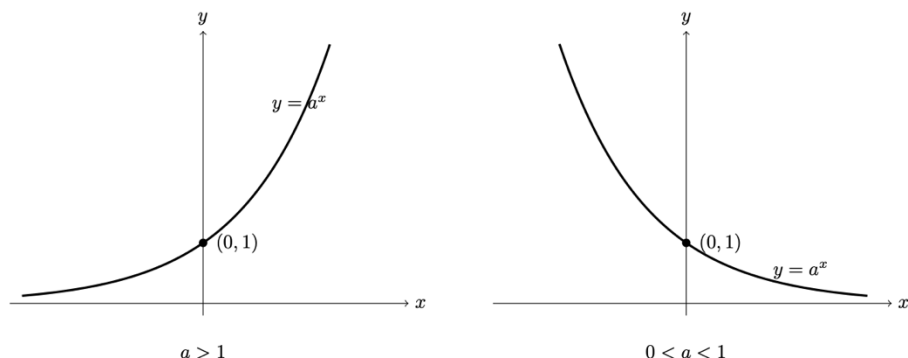
数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.2

学習のねらい

指数関数のグラフの特徴と性質を理解しよう！

1. 指数関数のグラフ

$a > 0, a \neq 1$ とすると、 $y = a^x$ は x の関数となる。関数 $y = a^x$ は底を a とする、 x の指数関数といい、以下のような見た目になる。



どちらも、必ず $(0, 1)$ を通る。なぜなら、どんな数であっても0乗したら、1になるからである。また、 x 軸に近づくが交わることはない。 $a^x = 0$ を満たす x が存在しないからである。つまり、 x 軸は漸近線である。

2. 指数関数の性質

グラフからわかるように、指数関数 $y = a^x$ には、次の性質がある。

$y = a^x$ において、

1. 定義域は実数全体である。また値域は正の数全体である。
2. $a > 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値も増加する。

$$p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$$

$0 < a < 1$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値は減少する。

$$p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$$

Topic—なぜ $a > 0$ なのか

指数関数のグラフを定義するとき、「 $a > 0, a \neq 1$ とすると」とした。 $a \neq 1$ は考えればすぐわかる。 $a = 1$ のとき、 $y = 1^x$ となって、ずっと $y = 1$ になるから考える意味がない。では、なぜ、 $a > 0$ なのだろう。

まず、 $a = -2$ として考えてみよう。すると、 $x = 1, 2, 3$ となるにつれて、 $y = -2, 4, -8$ となる。まあこの時点でも扱いにくいけど、もっと困る問題がある。

例えば、 $x = \frac{1}{2}$ とすると、 $y = (-2)^{\frac{1}{2}}$ となる。これは実数では定義できない。このように、 $y = (-2)^x$ は実数 x のすべてに対して値が定まらない。つまり、実数全体を定義域とする指数関数として扱うことができない。

だから指数関数では底を $a > 0$ に限定している。

◇問題

1. 次の数の大小を比較せよ。

$$\sqrt[5]{16}, \sqrt[7]{64}$$

2. 次の方程式と不等式を解け。

$$(1) 2 \cdot 2^x = 8\sqrt{2} \quad (2) 8^{x-1} < \sqrt[3]{2} \quad (3) 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

3. 関数 $y = 4^x - 2^{x+2} + 1$ ($-1 \leq x \leq 3$) について、次の問いに答えよ。

(1) $t = 2^x$ として、 y を t の関数で表せ。また、 t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値、最小値を求めよ。