

数学Ⅱ 第5章 指数関数と対数関数 No.3

学習のねらい

対数について理解しよう！

対数の様々な性質を理解して覚えよう！

1. 対数

例えば、 $2^x = 8$ なら、 $x = 3$ となる。では、 $2^x = 5$ のとき、 x の値はどうなるだろう。もちろん $2 < x < 3$ ということはすぐに分かるが、値を求めるのはなかなか難しい。そこで、このような値を、 $x = \log_2 5$ と書くことにした。

一般に、 $a^p = M$ が成り立つとき、これを $p = \log_a M$ と書ける。このとき、 p は a を底とする M の対数という。また、 M をこの対数の真数という。真数は常に正となる。

2. 対数の性質

対数の性質を調べてみる。

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

が成り立つから

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a \frac{1}{a} = -1$$

が成り立つ。

また、対数の定義より、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ のとき

$$a^{\log_a M} = M$$

が成り立つ。

最後に、指数法則と対数の定義から、対数について次の性質が導かれる。

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ で、 k が実数のとき

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

これらの証明は◇問題でやろう。

3. 底の変換公式

$\log_a b = p$ とすると、 $a^p = b$ となる。 $c > 0$ 、 $c \neq 1$ として c を底とする両辺の対数をとると、 $\log_c a^p = \log_c b$ となる。つまり $p \log_c a = \log_c b$ 。よって、 $a \neq 1$ より、 $\log_c a \neq 0$ であるから

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

これを底の変換公式という。

$a \neq 1$ 、 $b \neq 1$ 、 $c \neq 1$ の正の数とすると、以下が成り立つ。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

◇問題

1. 次の対数の値を求めよ。

$$(1) \log_3 81 \quad (2) \log_{10} \frac{1}{1000} \quad (3) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$$

2. 次の式を簡単にせよ。

$$(1) (\log_2 9 + \log_4 3) \log_3 4 \quad (2) (\log_3 25 + \log_9 5)(\log_5 9 + \log_{25} 3)$$

3. $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $M > 0$ 、 $N > 0$ で、 k が実数のとき

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

を証明せよ。