

No.1 分数関数

月 日 名前

今日のゴール

- ☐ $y = \frac{k}{x}$ のグラフと漸近線がわかる
- ☐ $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフを、平行移動を使ってかける
- ☐ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ を変形して、漸近線を見つけられる

1 $y = \frac{k}{x}$ のグラフ

中学でやった反比例 $y = \frac{k}{x}$ 、覚えてる？ グラフは双曲線っていう、2つに分かれた曲線だったよね。

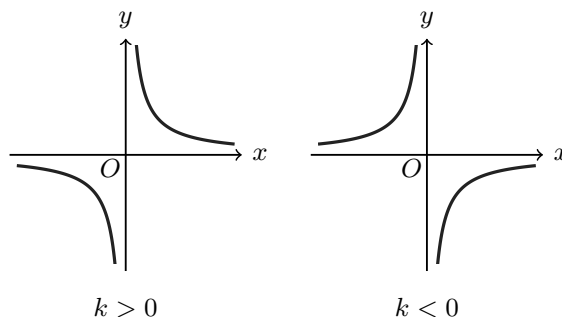
$y = \frac{k}{x}$ や $y = \frac{2x+1}{x-1}$ みたいに、 x の分数式で表される関数を、 x の分数関数っていうんだ。今日はこの分数関数のグラフをかけるようになろう。

$y = \frac{2}{x}$ で、 x をどんどん大きくしてみよう。 $x = 100$ なら $y = 0.02$ 、 $x = 10000$ なら $y = 0.0002$ 。 y は 0 に限りなく近づくけど、0 には絶対にならないよね。

こんなふうに、グラフ上の点がどこまでも遠くへいくとき、その直線との距離が限りなく 0 に近づいていく。そんな直線を、その曲線の漸近線っていうんだ。

$y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) のグラフ

- 漸近線は x 軸と y 軸
- 漸近線が直交しているから、直角双曲線ともいう
- $k > 0$ なら第1・第3象限、
 $k < 0$ なら第2・第4象限にある
- 定義域は $x \neq 0$ 、値域は $y \neq 0$



2 $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフ

数学Ⅰで、 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを平行移動したもの、ってやったよね。分数関数でも、まったく同じことが言えるんだ。

$y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフ

$y = \frac{k}{x}$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したもの。

- 漸近線は $x = p$ と $y = q$
- 定義域は $x \neq p$ 、値域は $y \neq q$

例題 1 関数 $y = \frac{2}{x-1} + 1$ のグラフをかいてみよう。また、漸近線、定義域、値域を答えてみよう。

考え方・解き方

$y = \frac{2}{x}$ のグラフを、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したものだね。

まず漸近線 $x = 1$ 、 $y = 1$ を点線でかいておこう。

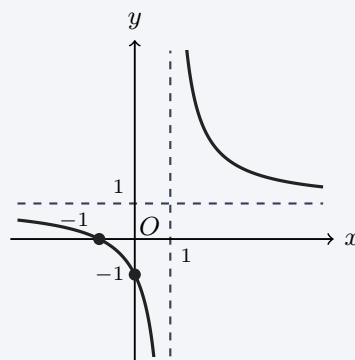
軸との交点も求めておくと、グラフがかきやすくなるんだ。

$x = 0$ のとき $y = -2 + 1 = -1$

$y = 0$ のとき $\frac{2}{x-1} = -1$ より $x = -1$

漸近線 $x = 1$ 、 $y = 1$

定義域 $x \neq 1$ 、値域 $y \neq 1$



ここに注意！

- $y = \frac{3}{x+2}$ の漸近線は $x = 2$ じゃなくて $x = -2$ 。 $x + 2 = x - (-2)$ だから、 $p = -2$ なんだよね。
- 先に漸近線を点線でかいて、それを「新しい軸」だと思ってかくと、ずいぶんかきやすくなるよ。

練習 1 次の関数の漸近線、定義域、値域を答えてみよう。

1 $y = \frac{3}{x+2} - 1$

2 $y = -\frac{2}{x-3} + 1$

3 $y = -\frac{4}{x} + 2$

3 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ みたいに、分子にも x があると、このままじゃ漸近線が見えないよね。

そこで、分子を「分母 $\times$ 商 $+$ 余り」の形に変形するんだ。 $2x+1 = 2(x-1) + 3$ だから

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

これで $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形になったね。

分子の次数を下げる

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ は、分子を分母でわって

$$y = \text{商} + \frac{\text{余り}}{\text{分母}}$$

の形に変形する。そうすると、 $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形が見えてくるんだ。

ここでは $c \neq 0$ 、 $ad - bc \neq 0$ の場合を考えているよ（下の「ここに注意！」を見てね）。

ここに注意！

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフが双曲線になるのは、 $c \neq 0$ **かつ** $ad - bc \neq 0$ のときなんだ。

- $c = 0$ なら、分母に x がないから、ただの 1 次関数（または定数関数）だよな。
- $ad - bc = 0$ なら、分子が分母の定数倍になって約分できちゃう。たとえば

$$y = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2 \quad (x \neq -1)$$

グラフは直線 $y = 2$ から点 $(-1, 2)$ を除いたもの。 $x = -1$ は漸近線じゃないんだ。

例題 2 関数 $y = \frac{2x+1}{x-1}$ のグラフをかいて、漸近線を答えてみよう。

考え方・解き方

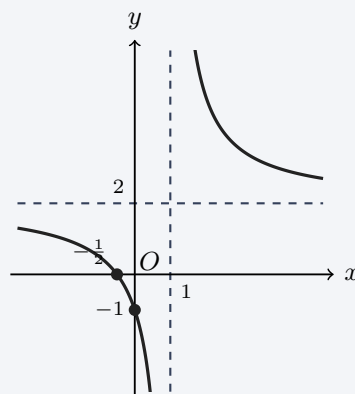
上で変形したとおり、 $y = \frac{3}{x-1} + 2$ だね。

$y = \frac{3}{x}$ のグラフを、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2 だけ平行移動したものなんだ。

$x = 0$ のとき $y = -1$

$y = 0$ のとき $2x+1=0$ より $x = -\frac{1}{2}$

漸近線 $x = 1$, $y = 2$



ここに注意！

分母の x の係数が 1 じゃないときは気をつけよう。たとえば

$$\frac{4x+3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)+1}{2x+1} = 2 + \frac{1}{2x+1}$$

漸近線は、分母が 0 になる $2x+1=0$ から $x = -\frac{1}{2}$ 。 $x = -1$ じゃないんだよね。

$y = \frac{k}{x-p} + q$ の形にそろえたいなら、 $\frac{1}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$ と分母の x の係数を 1 にすればいいんだ。

練習 2

次の関数を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形して、漸近線を答えてみよう。

1 $y = \frac{3x-1}{x+1}$

2 $y = \frac{-2x+5}{x-2}$

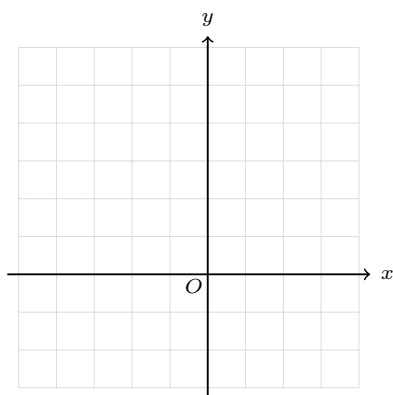
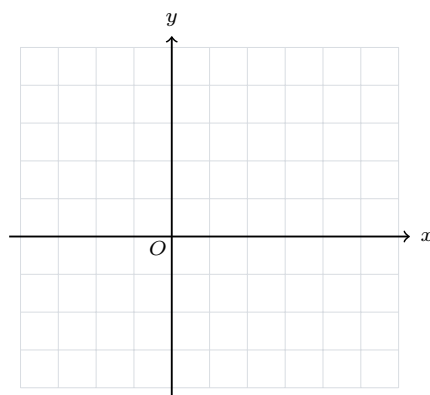
3 $y = \frac{4x+3}{2x+1}$

練習 3

次の関数のグラフをかいてみよう。漸近線と、軸との交点もかきこもう。

1 $y = -\frac{1}{x+1} + 2$

2 $y = \frac{x+1}{x-2}$



解答・解説

練習 1

- 1 漸近線 $x = -2$, $y = -1$ 、定義域 $x \neq -2$ 、値域 $y \neq -1$

$x + 2 = x - (-2)$ だから $p = -2$ 。符号に気をつけたかな？

- 2 漸近線 $x = 3$, $y = 1$ 、定義域 $x \neq 3$ 、値域 $y \neq 1$

$k = -2$ でも漸近線の求め方は同じ。 k の符号は、グラフがどの向きにあるかを決めるだけなんだ。

- 3 漸近線 $x = 0$, $y = 2$ 、定義域 $x \neq 0$ 、値域 $y \neq 2$

$x = 0$ は y 軸のこと。 x 軸方向には動いていないんだね。

練習 2

- 1 $3x - 1 = 3(x + 1) - 4$ だから $y = \frac{3(x + 1) - 4}{x + 1} = -\frac{4}{x + 1} + 3$

漸近線 $x = -1$, $y = 3$

- 2 $-2x + 5 = -2(x - 2) + 1$ だから $y = \frac{-2(x - 2) + 1}{x - 2} = \frac{1}{x - 2} - 2$

漸近線 $x = 2$, $y = -2$

- 3 $4x + 3 = 2(2x + 1) + 1$ だから $y = 2 + \frac{1}{2x + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} + 2$

漸近線 $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$

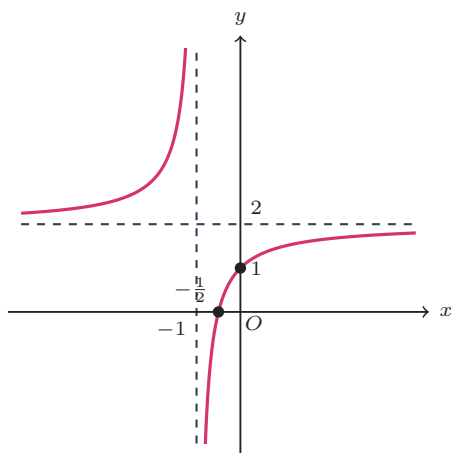
分母と分子を 2 でわって、分母の x の係数を 1 にしたんだね。漸近線 $y = 2$ は、分子と分母の x の係数の比 $\frac{4}{2}$ にもなっているよ。

練習 3

- 1 漸近線 $x = -1$, $y = 2$

$x = 0$ のとき $y = 1$

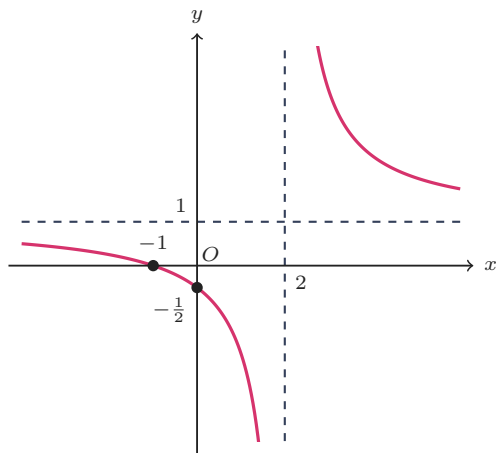
$y = 0$ のとき $\frac{1}{x + 1} = 2$ より $x = -\frac{1}{2}$



- 2 $\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{(x - 2) + 3}{x - 2} = \frac{3}{x - 2} + 1$

漸近線 $x = 2$, $y = 1$

$x = 0$ のとき $y = -\frac{1}{2}$ 、 $y = 0$ のとき $x = -1$



(1) は $k = -1 < 0$ だから、漸近線を軸と見たときの「第 2・第 4 象限」の位置にグラフがくるんだね。