

No.2 無理関数

月 日 名前

今日のゴール

- ☐ $y = \sqrt{ax}$ のグラフの形と向きがわかる
- ☐ $y = \sqrt{ax+b}$ を変形して、**平行移動**でグラフがかける
- ☐ 無理関数の**定義域**と**値域**が求められる

1 $y = \sqrt{ax}$ のグラフ

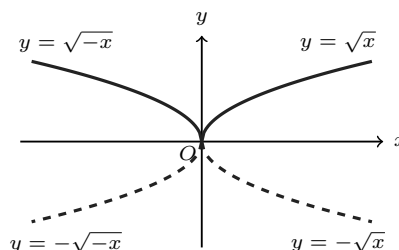
$\sqrt{x}$ や $\sqrt{2x-4}$ みたいに、根号の中に文字を含む式を**無理式**っていうんだ。そして、 x の無理式で表される関数を、 x の**無理関数**っていうよ。

まずはいちばん基本の $y = \sqrt{x}$ から。根号の中は 0 以上じゃないといけないから、定義域は $x \geq 0$ だね。

両辺を 2 乗すると $y^2 = x$ 、つまり $x = y^2$ 。これは放物線 $y = x^2$ の x と y を入れかえた形なんだ。ただし $\sqrt{x} \geq 0$ だから $y \geq 0$ 。つまり、横向き放物線の上半分だけがグラフになるんだよね。

 $y = \sqrt{ax}$ ($a \neq 0$) のグラフ

- 原点から出発する曲線
- $a > 0$ なら右へ、 $a < 0$ なら左へのびる
- 定義域は $ax \geq 0$ 、値域は $y \geq 0$
- $y = -\sqrt{ax}$ のグラフは、 $y = \sqrt{ax}$ のグラフと x 軸に関して対称。値域は $y \leq 0$



2 $y = \sqrt{ax + b}$ のグラフ

分数関数と同じで、無理関数も**平行移動**で考えられるんだ。カギは、根号の中を a でくくることだよ。

$y = \sqrt{a(x-p)}$ のグラフ

$y = \sqrt{a(x-p)}$ のグラフは、 $y = \sqrt{ax}$ のグラフを **x 軸方向に p** だけ平行移動したもの。

$y = \sqrt{ax+b}$ は、 $y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}$ と変形してから考えよう。

グラフは点 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ から出発するんだ。

例題 1 関数 $y = \sqrt{2x-4}$ のグラフをかいてみよう。また、定義域と値域を答えてみよう。

考え方・解き方

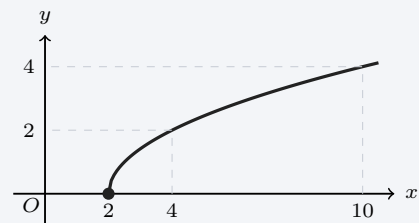
根号の中を 2 でくくると $y = \sqrt{2(x-2)}$ 。

だから、 $y = \sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものなんだ。

点 (2, 0) から右へのびて、(4, 2)、(10, 4) を通るね。

定義域は、根号の中が 0 以上だから $2x-4 \geq 0$ より $x \geq 2$ 。

定義域 $x \geq 2$ 、**値域** $y \geq 0$



ここに注意！

$\sqrt{2x-4}$ を見て、「 x 軸方向に 4 だけ平行移動」って思っちゃわなかった？

$2x-4 = 2(x-2)$ だから、移動するのは 2 なんだよね。先に a でくくるのを忘れないようにしよう。

例題 2 関数 $y = \sqrt{-x+3}$ のグラフをかいてみよう。また、定義域と値域を答えてみよう。

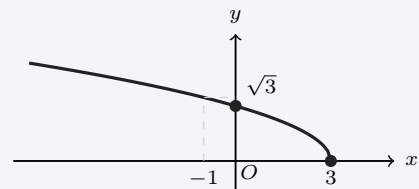
考え方・解き方

-1 でくくると $y = \sqrt{-(x-3)}$ 。

$y = \sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したものだね。 $a = -1 < 0$ だから、グラフは**左へ**のびるんだ。

点 (3, 0) から出発して、(2, 1)、(-1, 2) を通るよ。

定義域 $x \leq 3$ 、**値域** $y \geq 0$



練習 1 次の関数の定義域と値域を答えよう。

1 $y = \sqrt{3x+6}$

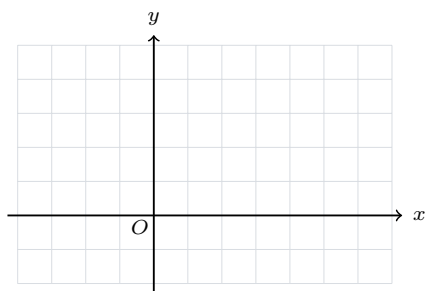
3 $y = \sqrt{4-2x}$

2 $y = -\sqrt{x-1}$

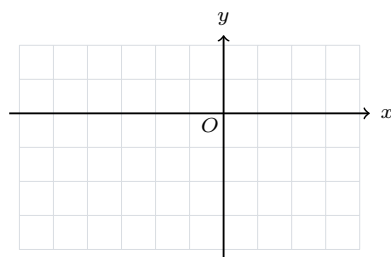
4 $y = \sqrt{x-2} + 1$

練習 2 次の関数のグラフをかいてみよう。

1 $y = \sqrt{2x+4}$



2 $y = -\sqrt{-x+1}$



3 定義域が限られたときの値域

$y = \sqrt{ax+b}$ のグラフって、 $a > 0$ ならずっと**右上がり**、 $a < 0$ ならずっと**右下がり**だったよね。

だから、定義域が区間で限られていたら、**両はしの x の値**を代入すれば値域がわかるんだ。

例題 3 関数 $y = \sqrt{x+1}$ ($0 \leq x \leq 8$) の値域を求めてみよう。

考え方・解き方

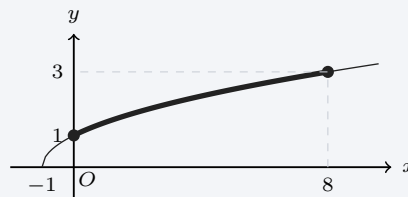
$a = 1 > 0$ だから、グラフは右上がりだね。

$x = 0$ のとき $y = \sqrt{1} = 1$

$x = 8$ のとき $y = \sqrt{9} = 3$

グラフの太い部分を見ると、 y は 1 から 3 まで動くね。

値域 $1 \leq y \leq 3$



ここに注意！

$a < 0$ のときは右下がりだから、 x が小さいほうで y が大きくなるんだ。両はしを代入したら、どっちが大きいかを確かめてから不等式に書こう。

練習 3 次の関数の値域を求めてみよう。

1 $y = \sqrt{2x-2}$ ($1 \leq x \leq 9$)

2 $y = -\sqrt{x+4}$ ($-3 \leq x \leq 5$)

3 $y = \sqrt{6-2x}$ ($-5 \leq x \leq 1$)

解答・解説

練習 1

- 1 定義域 $x \geq -2$ 、値域 $y \geq 0$

$3x + 6 \geq 0$ より $x \geq -2$ だね。

- 2 定義域 $x \geq 1$ 、値域 $y \leq 0$

前にマイナスがついているから、 y は 0 以下になるんだ。

- 3 定義域 $x \leq 2$ 、値域 $y \geq 0$

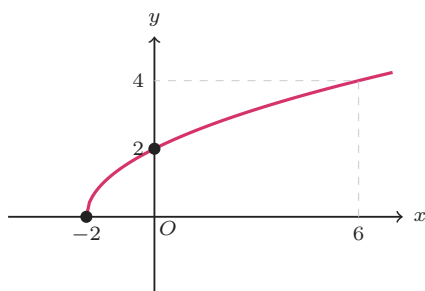
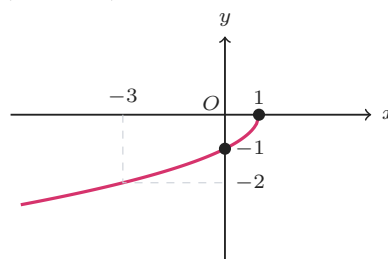
$4 - 2x \geq 0$ より $-2x \geq -4$ 。負の数でわるから向きが逆で $x \leq 2$ 。

- 4 定義域 $x \geq 2$ 、値域 $y \geq 1$

$+1$ は y 軸方向に 1 の平行移動。値域も 1 だけ上にずれるんだね。

練習 2

- 1 $y = \sqrt{2(x+2)}$ だから、 $y = \sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動。点 $(-2, 0)$ から右へ。 $(0, 2)$ 、 $(6, 4)$ を通る。
- 2 $y = -\sqrt{-(x-1)}$ だから、 $y = -\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動。点 $(1, 0)$ から左下へ。 $(0, -1)$ 、 $(-3, -2)$ を通る。



(2) は、 $y = \sqrt{-x+1}$ のグラフを x 軸に関して折り返したもの、と考えてもいいね。

練習 3

- 1 $x = 1$ のとき $y = 0$ 、 $x = 9$ のとき $y = \sqrt{16} = 4$ 。右上がりだから $0 \leq y \leq 4$

- 2 $x = -3$ のとき $y = -1$ 、 $x = 5$ のとき $y = -\sqrt{9} = -3$ 。

前にマイナスがついているから右下がりなんだ。 $-3 \leq y \leq -1$

- 3 $x = -5$ のとき $y = \sqrt{16} = 4$ 、 $x = 1$ のとき $y = \sqrt{4} = 2$ 。

$a = -2 < 0$ で右下がりだね。 $2 \leq y \leq 4$

$4 \leq y \leq 2$ って書きちゃわなかった？ 小さいほうを左に書くんだよね。