

No.3 グラフを使った方程式・不等式

月 日 名前

今日のゴール

- ☐ 分数方程式・無理方程式が解ける（2乗したら確かめる）
- ☐ グラフの上下関係を見て、不等式が解ける
- ☐ 直線を動かして、共有点の個数を調べられる

1 分数方程式・分数不等式

方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解は、2つのグラフ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標だったよね。

そして、不等式 $f(x) > g(x)$ の解は、 $y = f(x)$ のグラフが $y = g(x)$ のグラフより上にあるところの x の範囲なんだ。

グラフで不等式を解く

- まず方程式 $f(x) = g(x)$ を解いて、共有点の x 座標を求める
- グラフをかいて、 $f(x)$ のほうが上にある（ $f(x) > g(x)$ ）範囲を読みとる

例題 1 次の方程式・不等式を解いてみよう。

$$(1) \frac{3}{x-1} = x+1$$

$$(2) \frac{3}{x-1} > x+1$$

考え方・解き方

(1) 両辺に $x-1$ をかけると $3 = (x+1)(x-1)$

$$x^2 - 1 = 3 \text{ より } x^2 = 4 \text{ で } x = \pm 2$$

どちらも $x \neq 1$ を満たすから $x = \pm 2$

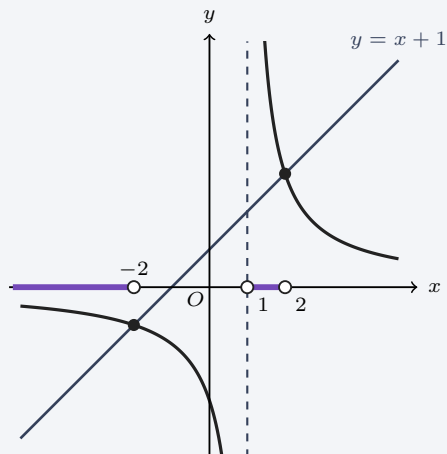
(2) (1) から、2つのグラフの共有点は

$(-2, -1)$ と $(2, 3)$ だね。

右の図で、双曲線が直線より上にあるのは

$x < -2$ と、 $1 < x < 2$ のところ。

$x < -2, 1 < x < 2$



ここに注意！

(2) で、(1) と同じように両辺に $x - 1$ をかけちゃダメなんだ。

$x - 1$ が正か負かわからないから、**不等号の向きが決められない**んだよね。だからグラフを使うんだ。

それと、漸近線 $x = 1$ のところでグラフが切れているのを見落とさないようにしよう。 $1 < x$ の「1」はここから出てくるんだ。

練習 1 次の方程式・不等式を、グラフを使って解いてみよう。

1 $\frac{2}{x} = x - 1$

2 $\frac{2}{x} > x - 1$

3 $\frac{4}{x+2} \geq -x + 1$

2 無理方程式・無理不等式

無理方程式は、両辺を 2 乗して根号をはずすのが基本なんだ。

でも、ここに落とし穴があるんだよね。 $A = B$ なら $A^2 = B^2$ だけど、 $A^2 = B^2$ からは $A = B$ **または** $A = -B$ しか言えない。つまり、2 乗すると**もとの方程式の解じゃないもの**がまぎれこむことがあるんだ。

無理方程式の解き方

- 両辺を 2 乗して、根号のない方程式にして解く
- 出てきた解を**もとの方程式に代入して確かめる**（グラフの共有点を見てもいい）

例題 2 次の方程式・不等式を解いてみよう。

(1) $\sqrt{x+2} = x$

(2) $\sqrt{x+2} > x$

考え方・解き方

(1) 両辺を 2 乗すると $x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$ より $(x-2)(x+1) = 0$ で $x = 2, -1$

もとの式に代入してみよう。

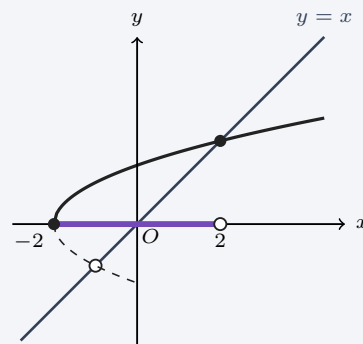
$x = 2$: 左辺 $\sqrt{4} = 2$ 、右辺 2 ○

$x = -1$: 左辺 $\sqrt{1} = 1$ 、右辺 -1 ×

よって $x = 2$

(2) 共有点は $(2, 2)$ だけ。曲線が直線より上にあるのは

$-2 \leq x < 2$ のところだね。 $-2 \leq x < 2$



ここに注意！

$x = -1$ は、 $x+2 = x^2$ の解だけど、もとの方程式の解じゃないよね。これは $-\sqrt{x+2} = x$ の解なんだ（図の点線が $y = -\sqrt{x+2}$ で、○の点が $y = x$ との交点）。2 乗すると、こっちの解もいっしょに出てきちゃうんだよね。

(2) では、根号の中が 0 以上になる $x \geq -2$ の範囲で考えるのも忘れずに。

練習 2 次の方程式・不等式を、グラフを使って解いてみよう。

1 $\sqrt{3-x} = x-1$

2 $\sqrt{3-x} \geq x-1$

3 $\sqrt{x+4} < x+2$

3 共有点の個数

$y = x + k$ は傾き 1 の直線で、 k が変わると上下に平行移動するよね。この直線を動かしながら、曲線との共有点の個数がどう変わるかを調べてみよう。

例題 3 曲線 $y = \sqrt{x+2}$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を、 k の値によって調べてみよう。

考え方・解き方

直線を上から下へ動かしていくと、個数が変わる境目は 2 つあるんだ。

ア 曲線に接するとき

$\sqrt{x+2} = x + k$ の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 2 = 0$$

判別式 $D = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 2) = 9 - 4k$

$D = 0$ より $k = \frac{9}{4}$ 、重解は $x = -\frac{7}{4}$ 。

ただ、2 乗した式は下半分 $y = -\sqrt{x+2}$ との共有点も表しているから、判別式だけでは接するとは言いきれないんだ。

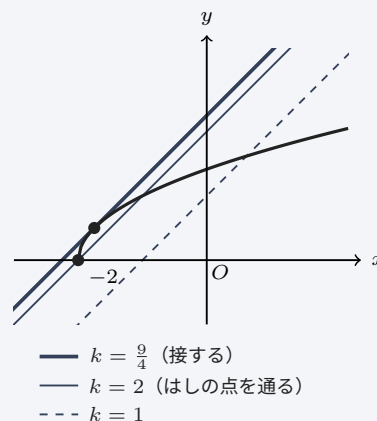
$x = -\frac{7}{4}$ のとき、直線も曲線も $y = \frac{1}{2}$ で一致する。だから

接点 $\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ は、確かにもとの曲線上にあるね。

イ 曲線のはしの点 $(-2, 0)$ を通るとき

$0 = -2 + k$ より $k = 2$

図を見ながらまとめると



$k > \frac{9}{4}$	$k = \frac{9}{4}$	$2 \leq k < \frac{9}{4}$	$k < 2$
0 個	1 個	2 個	1 個

ここに注意！

- $D = 0$ でも、接点の y 座標が負なら、下半分の $y = -\sqrt{x+2}$ に接しているだけで、もとの曲線とは接していない。 $D = 0$ のあとは、接点があもとの曲線上にあるか必ず確かめよう。
- $k = 2$ のときは、はしの点 $(-2, 0)$ でも交わるから 2 個なんだ。境目の値で、端の点を含むかどうかを図でしっかり確かめようね。

練習 3

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を、 k の値によって調べてみよう。

解答・解説

練習 1

- 1 両辺に x をかけて $2 = x^2 - x$ 。 $(x - 2)(x + 1) = 0$ より

$$x = 2, -1$$

どちらも $x \neq 0$ を満たすね。

- 2 共有点は $(-1, -2)$ と $(2, 1)$ 。双曲線が直線より上にあるのは

$$x < -1, 0 < x < 2$$

$x = 0$ は漸近線。ここをまたいで上下が入れかわるんだ。

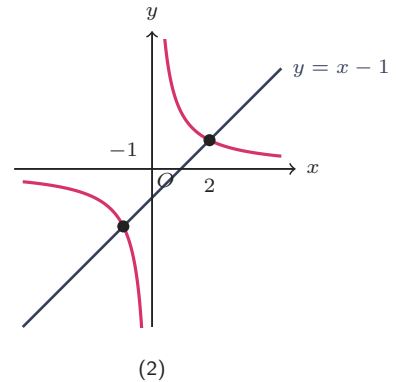
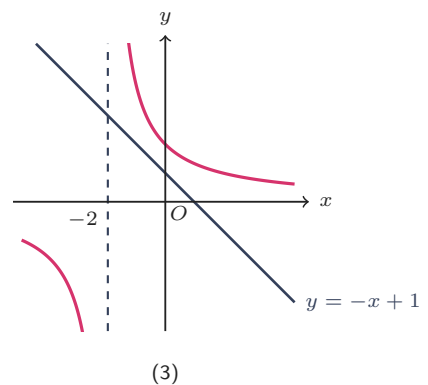
- 3 $4 = (-x + 1)(x + 2)$ を整理すると $x^2 + x + 2 = 0$ 。判別式

$$D = 1 - 8 < 0$$

だから、**共有点はない**んだ。

$x > -2$ では双曲線がずっと直線より上、 $x < -2$ では双曲線は負で直線は正だから下。

$$x > -2$$



練習 2

- 1 両辺を 2 乗して $3 - x = x^2 - 2x + 1$ 。 $x^2 - x - 2 = 0$ より

$$x = 2, -1$$

確かめると、 $x = 2$ は左辺 1、右辺 1 で○。 $x = -1$ は左辺 2、右辺 -2 で×

$$x = 2$$

- 2 根号の中から $x \leq 3$ 。共有点は $(2, 1)$ だけで、その左側で曲線が直線より上にあるね。

$$x \leq 2$$

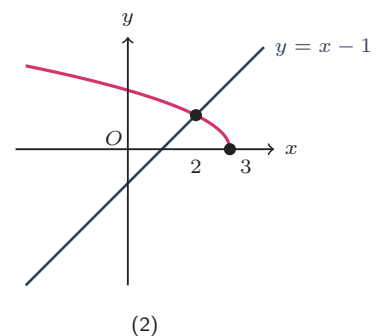
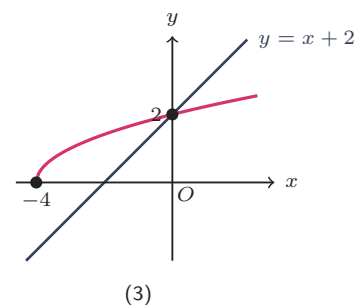
$x < 1$ では右辺が負だから、左辺 ≥ 0 のほうが必ず大きいんだね。

- 3 両辺を 2 乗して $x + 4 = x^2 + 4x + 4$ 。 $x^2 + 3x = 0$ より

$$x = 0, -3$$

$x = -3$ は左辺 1、右辺 -1 で不適。共有点は $(0, 2)$ だけ。

直線が曲線より上にあるのは $x > 0$



練習 3

ア 接するとき： $\sqrt{x} = x + k$ を 2 乗して $x^2 + (2k - 1)x + k^2 = 0$

判別式 $D = (2k - 1)^2 - 4k^2 = 1 - 4k = 0$ より $k = \frac{1}{4}$

重解は $x = \frac{1}{4}$ 。直線は $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 、曲線は $y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ で

一致するから、接点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ はもとの曲線上にあるね。

イ 原点 $(0, 0)$ を通るとき： $k = 0$

$k > \frac{1}{4}$	$k = \frac{1}{4}$	$0 \leq k < \frac{1}{4}$	$k < 0$
0 個	1 個	2 個	1 個

$k = 0$ のときは、原点と $(1, 1)$ の 2 点で交わるんだね。

