

No.4 逆関数

月 日 名前

今日のゴール

- ☐ 逆関数の意味がわかって、求められる
- ☐ 逆関数では、定義域と値域が入れかわることがわかる
- ☐ $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフが、直線 $y = x$ に関して対称になることがわかる

1 逆関数とは

関数 $y = 2x - 4$ では、 x を決めると y が1つ決まるよね。

じゃあ逆に、 y を決めたら x は決まるかな？ x について解くと $x = \frac{1}{2}y + 2$ だから、 y を決めると x もただ1つに決まるんだ。つまり、 x を y の関数と見ることができるんだよね。

ここで、ふつうの関数と同じように「 x を入力、 y を出力」の形にそろえるために、 x と y を入れかえると

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

これを、もとの関数 $f(x) = 2x - 4$ の逆関数といって、 $f^{-1}(x)$ で表すんだ。

逆関数の求め方

関数 $y = f(x)$ で、値域のどの y に対しても x がただ1つ決まる時

- 1 $y = f(x)$ を x について解く
- 2 x と y を入れかえる
- 3 逆関数の定義域は、もとの関数の値域（値域は、もとの定義域）

例題 1

次の関数の逆関数を求めてみよう。 (1) $y = 2x - 4$ (2) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

考え方・解き方

(1) 上でやったとおり、 $x = \frac{1}{2}y + 2$ 。 x と y を入れかえて $y = \frac{1}{2}x + 2$

(2) 両辺に $x - 1$ をかけて $y(x - 1) = 2x + 1$ 。 x のある項を左辺に集めると

$$xy - 2x = y + 1 \quad (y - 2)x = y + 1 \quad x = \frac{y + 1}{y - 2}$$

もとの関数は $y = \frac{3}{x-1} + 2$ だから値域は $y \neq 2$ 。だから $y - 2$ でわっても大丈夫なんだ。

x と y を入れかえて $y = \frac{x + 1}{x - 2}$

ここに注意！

$f^{-1}(x)$ の「 -1 」は指数じゃないんだ。 $f^{-1}(x)$ は $\frac{1}{f(x)}$ のことじゃないよ。「 f の逆をたどる関数」っていう意味の記号なんだよね。

2 定義域に気をつける逆関数

無理関数みたいに定義域や値域に制限がある関数では、その制限もいっしょに入れかわるんだ。ここが大事なところなんだよね。

例題 2

関数 $y = \sqrt{x - 1}$ の逆関数を求めてみよう。

考え方・解き方

もとの関数の定義域は $x \geq 1$ 、値域は $y \geq 0$ だね。

両辺を 2 乗すると $y^2 = x - 1$ だから $x = y^2 + 1$ ($y \geq 0$)

x と y を入れかえると、定義域ともとの値域が入れかわって

$$y = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$$

ここに注意！

($x \geq 0$) を書き忘れると、 $y = x^2 + 1$ は放物線全体になっちゃうよね。でも、もとの関数の値域は $y \geq 0$ だけだから、逆関数は放物線の右半分だけなんだ。

それと、 $y = x^2$ みたいに、1 つの y に x が 2 つ対応する関数 (たとえば $y = 4$ なら $x = \pm 2$) には、そのままと逆関数がないんだ。定義域を $x \geq 0$ のように制限すれば、逆関数を考えられるようになるよ。

練習 1 次の関数の逆関数を求めてみよう。定義域に制限があるときは、それも書こう。

1 $y = -3x + 6$

4 $y = \sqrt{2x + 4}$

2 $y = \frac{3}{x+2}$

5 $y = x^2 - 2x \quad (x \geq 1)$

3 $y = \frac{x-3}{x+1}$

6 $y = 2^x$

3 逆関数のグラフ

$f(a) = b$ のとき、点 (a, b) は $y = f(x)$ のグラフ上にあるよね。

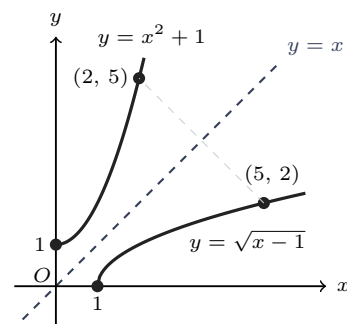
逆関数は「 x と y を入れかえたもの」だから、 $f^{-1}(b) = a$ 。つまり、点 (b, a) が $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上にあるんだ。

そして、点 (a, b) と点 (b, a) は、直線 $y = x$ に関して対称な位置にあるんだよね。

逆関数のグラフ

- $f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$
- $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称

右の図は、例題 2 の $y = \sqrt{x-1}$ と、その逆関数 $y = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$ だよ。



例題 3 1 次関数 $f(x) = ax + b$ が、 $f(1) = 5$ 、 $f^{-1}(3) = 0$ を満たすとき、定数 a 、 b の値を求めてみよう。

考え方・解き方

逆関数を実際に求めなくても大丈夫。 $f^{-1}(3) = 0$ は、 $f(0) = 3$ と同じことなんだ。

$$f(0) = 3 \text{ より } b = 3$$

$$f(1) = 5 \text{ より } a + b = 5 \text{ だから } a = 2 \quad a = 2, b = 3$$

練習 2 1 次関数 $f(x) = ax + b$ が、 $f(1) = 1$ 、 $f^{-1}(7) = 3$ を満たすとき、定数 a 、 b の値を求めてみよう。

練習 3 関数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ の逆関数を求めてみよう。また、求めた結果からわかることを答えてみよう。

解答・解説

練習 1

1 $3x = -y + 6$ より $x = -\frac{1}{3}y + 2$ 。入れかえて $y = -\frac{1}{3}x + 2$

2 $x + 2 = \frac{3}{y}$ より $x = \frac{3}{y} - 2$ 。入れかえて $y = \frac{3}{x} - 2$
 もとの値域は $y \neq 0$ だから、 y でわってもいいんだね。

3 $y(x+1) = x-3$ より $(y-1)x = -y-3$ で $x = -\frac{y+3}{y-1}$ 。入れかえて $y = -\frac{x+3}{x-1}$
 $y = \frac{x+3}{1-x}$ と書いても同じだよ。

4 もとの定義域は $x \geq -2$ 、値域は $y \geq 0$ 。2乗して $y^2 = 2x+4$ より $x = \frac{1}{2}y^2 - 2$
 入れかえて $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ($x \geq 0$)

5 $y = (x-1)^2 - 1$ で、 $x \geq 1$ だから値域は $y \geq -1$ 。
 $(x-1)^2 = y+1$ で、 $x-1 \geq 0$ だから $x-1 = \sqrt{y+1}$ 、つまり $x = 1 + \sqrt{y+1}$
 入れかえて $y = 1 + \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

$x \geq 1$ だから、 $\pm$ のうち $+$ のほうだけを選ぶんだ。 $(x \geq -1)$ は根号の中の条件と同じだから、書かなくても正解だよ。

6 数学IIでやった対数を使うと $x = \log_2 y$ 。入れかえて $y = \log_2 x$

指数関数と対数関数は、おたがいに逆関数なんだね。だからグラフも $y = x$ に関して対称だったんだ。

練習 2

$f^{-1}(7) = 3$ は $f(3) = 7$ と同じこと。

$a + b = 1$ 、 $3a + b = 7$ を連立して解くと $a = 3$ 、 $b = -2$

練習 3

$y(x-2) = 2x+1$ より $(y-2)x = 2y+1$ で $x = \frac{2y+1}{y-2}$ 。入れかえて $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

わかること：逆関数がもとの関数と同じになる

だから、 $y = f(x)$ のグラフは、それ自身が直線 $y = x$ に関して対称なんだ。漸近線 $x = 2$ と $y = 2$ も、ちゃんと入れかわっても同じになっているよね。