

No.5 合成関数

月 日 名前

今日のゴール

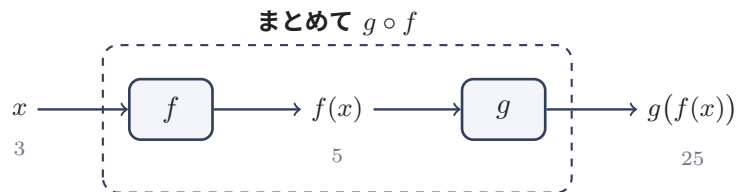
- ☐ 合成関数 $(g \circ f)(x)$ の意味がわかって、式で表せる
- ☐ $g \circ f$ と $f \circ g$ のちがい（合成の順番）に気をつけられる
- ☐ 合成関数の式から、もとの関数を逆にたどって求められる

1 合成関数とは

2つの関数 $f(x) = x + 2$ と $g(x) = x^2$ を考えてみよう。

$x = 3$ を f に入れると $f(3) = 5$ 。その 5 を今度は g に入れると $g(5) = 25$ だね。

こんなふうに、 f の出力を、そのまま g の入力にする。これを1つの関数として見たものが合成関数なんだ。



合成関数

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- f と g の合成関数を $g \circ f$ と書く
- 計算するのは右の f が先、左の g があと

例題 1 $f(x) = x + 2$ 、 $g(x) = x^2$ のとき、 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めてみよう。

考え方・解き方

$(g \circ f)(x)$ は、先に f 。 $f(x) = x + 2$ を g の x のところに入れるんだ。

$$(g \circ f)(x) = g(x + 2) = (x + 2)^2 \quad (= x^2 + 4x + 4)$$

$(f \circ g)(x)$ は、先に g 。 $g(x) = x^2$ を f の x のところに入れるよ。

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 2$$

同じ 2 つの関数なのに、順番を変えたら別の関数になったね。

ここに注意！

$g \circ f$ は「 g が先」って読みたくなるよね。でも、**先に計算するのは右側の f なんだ。**

迷ったら $g(f(x))$ と書きなおしてみよう。かっこの**内側から**計算していけばいいんだよね。

それと、例題 1 のように、ふつうは $g \circ f$ と $f \circ g$ は**同じ関数にならないよ。**

2 いろいろな合成関数

例題 2 $f(x) = 2x - 1$ 、 $g(x) = \frac{1}{x+1}$ のとき、次の関数を求めてみよう。

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$ (3) $(f \circ f)(x)$

考え方・解き方

(1) g の x のところに $2x - 1$ を入れて

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{(2x - 1) + 1} = \frac{1}{2x}$$

$x = 0$ のときは $f(0) = -1$ になって、 g の分母が 0 になっちゃう。だから $x \neq 0$ なんだね。

(2) f の x のところに $\frac{1}{x+1}$ を入れて

$$(f \circ g)(x) = 2 \cdot \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2 - (x+1)}{x+1} = \frac{-x+1}{x+1}$$

(3) f に f を入れるんだ。 $(f \circ f)(x) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$

合成関数の定義域

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ が定義されるのは、次の2つを両方満たす x だけなんだ。

- x が f の定義域に入っている (f に入れられる)
- $f(x)$ が g の定義域に入っている (出てきた値を g に入れられる)

例題2の(1)なら、 f の定義域はすべての実数、 g の定義域は $x \neq -1$ 。 $f(x) \neq -1$ つまり $2x - 1 \neq -1$ から $x \neq 0$ になるんだね。

練習1

$f(x) = x - 3$ 、 $g(x) = 2x^2$ 、 $h(x) = \frac{1}{x}$ のとき、次のものを求めてみよう。

1 $(g \circ f)(x)$

4 $(f \circ h)(x)$

2 $(f \circ g)(x)$

5 $(g \circ f)(2)$

3 $(h \circ f)(x)$

6 $(h \circ h)(x)$

3 合成関数を逆にたどる

今度は逆に、合成した結果がわかっているときに、もとの関数を求めてみよう。ポイントは、**内側の関数をひとかたまりで見ること**なんだ。

例題3 $f(x) = 2x + 1$ のとき、 $(h \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ となる関数 $h(x)$ を求めてみよう。

考え方・解き方

$(h \circ f)(x) = h(2x + 1)$ だから、 $4x^2 + 4x$ を「 $2x + 1$ のかたまり」で表せばいいんだ。

$$4x^2 + 4x = (4x^2 + 4x + 1) - 1 = (2x + 1)^2 - 1$$

つまり $h(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1$ 。

$2x + 1 = t$ とおくと $h(t) = t^2 - 1$ だね。 x がすべての実数を動くと、 t もすべての実数を動くから、文字を x にもどして $h(x) = x^2 - 1$

ここに注意！

$2x + 1 = t$ とおいたら、 $x = \frac{t-1}{2}$ を代入して計算しても求められるよ。

かたまりが見つけにくいときは、こっちの方法が確実なんだ。

逆関数との合成

f をしてから f^{-1} をすると、もとにもどる。逆の順番でも同じなんだ。

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

たとえば $f(x) = 2x - 4$ 、 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$ なら、 $f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x$ だね。

練習 2 $f(x) = x + 1$ のとき、 $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 3$ となる関数 $g(x)$ を求めてみよう。

練習 3 $f(x) = 2x - 1$ 、 $g(x) = ax + b$ のとき、 $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ がすべての x で成り立つような、 a と b の関係を求めてみよう。

解答・解説

練習 1

1 $g(x-3) = 2(x-3)^2$ 展開して $2x^2 - 12x + 18$ でも正解だよ。

2 $f(2x^2) = 2x^2 - 3$

3 $h(x-3) = \frac{1}{x-3}$

4 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 3 = \frac{1-3x}{x}$

(3) と (4) で、順番を変えると答えがまったくちがうよね。

5 先に $f(2) = -1$ 。それを g に入れて $g(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$

(1) の式に $x = 2$ を入れて $2(2-3)^2 = 2$ としてもいいね。

6 $h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$

逆数の逆数でもとにもどるんだ。 h は、自分自身が逆関数になっている関数なんだね。

練習 2

$(g \circ f)(x) = g(x+1)$ だから、 $x^2 + 2x + 3$ を $x+1$ のかたまりで表すと

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

$g(x+1) = (x+1)^2 + 2$ だから $g(x) = x^2 + 2$

練習 3

$$(g \circ f)(x) = a(2x-1) + b = 2ax - a + b$$

$$(f \circ g)(x) = 2(ax+b) - 1 = 2ax + 2b - 1$$

すべての x で等しいから、 x の係数と定数項がそれぞれ等しい。 x の係数はどちらも $2a$ で同じだから、定数項について $-a + b = 2b - 1$

よって $b = 1 - a$ ($a + b = 1$ と書いてもいいよ)