

数学 A 第 I 章 場合の数 No. 1

学習のねらい

“集合”という新しい概念を理解し、書き表し方に慣れよう！

1. 集合・要素

「1 から 10 までの自然数の集まり」というと、その集まりの範囲がはっきりしている。一方で、「大きい数の集まり」というと、人によって範囲が変わってしまう。

数学の世界では、範囲がはっきりとしたものの集まりを集合という。また、集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の要素という。

例えば、「Mrs. GREEN APPLE」という集合に対して、「大森元貴」は要素ということである。

a が集合 A の要素であるとき、 a は集合 A に属するといい、記号で、 $a \in A$ と表す。先ほどの例で言うと、

大森元貴 $\in$ Mrs. GREEN APPLE

ということである。

また、 b が集合 A の要素でないことを、 $b \notin A$ と表す。先の例だと、

二宮和也 $\notin$ Mrs. GREEN APPLE

ということである。

(これを作っている段階では、二宮和也は Mrs. GREEN APPLE に所属していません。)

2. 集合の表し方

集合を表すときには、 $\{ \}$ を用いて以下のように表す。

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

(2) 5 の倍数の集合 B

$$B = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

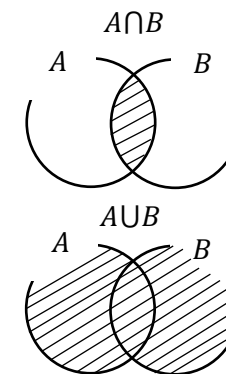
表し方には 2 種類方法があつて、要素を書き並べる方法と、縦線の左側に要素を代表して文字で表し、縦線の右側にその文字に対する条件を書く方法がある。

また、集合 A のような有限個の要素からなる集合を有限集合、集合 B のような無限に多くの要素からなる集合を無限集合という。

3. 共通部分・和集合

2 つの集合 A 、 B に対して、 A 、 B どちらにも属する要素全体の集合を A と B の共通部分といい、 $A \cap B$ と表す。

また、2 つの集合 A 、 B に対して、 A 、 B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の和集合といい、 $A \cup B$ と表す。



例) $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 、 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ において、

$$A \cap B = \{6, 12\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

◇問題

1. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とする。次の数字と $\mathbb{Q}$ の間に、 $\in$ もしくは、 $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ。

(1) $3 \in \mathbb{Q}$ (2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (3) $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

2. 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 18の正の約数全体の集合 A

(2) $B = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \text{は整数}\}$

(3) $C = \{2n + 1 \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

3. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ について、 $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ を求めよ。

数学 A 第 I 章 場合の数 No.2

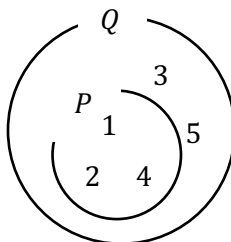
学習のねらい

様々な集合を理解し、ド・モルガンの法則について理解して覚えよう！

1. 部分集合

2つの集合 $P = \{1, 2, 4\}$ 、 $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ では、 P のどの要素も Q の要素になっている。一般に2つの集合 A 、 B において、 A のどの要素も B の要素である時、すなわち「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つとき、 A は B の部分集合であるといい、 $A \subset B$ と表す。

このとき、 A は B に含まれる、または B は A を含むという。



注) 右上図のような包含関係を表した図をベン図という。

No.1 の例で言うと、

Mrs. GREEN APPLE $\subset$ アーティスト

ということである。

また、要素を1つも持たない集合も考える。この集合を空集合といい、記号 ϕ で表す。また空集合は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

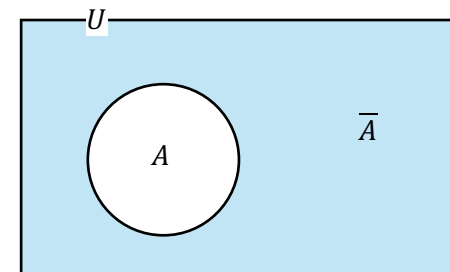
すなわち、任意の集合 A に対して、 $\phi \subset A$ とする。

例) 集合 $\{1, 2\}$ の部分集合は、 ϕ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{1, 2\}$ である。

2. 全体集合・補集合

集合を考える時、例えば「日本の」などと、1つの集合 U を最初に決めて、要素としては U の要素だけを、集合としては U の部分集合だけを考えることが多い。このとき、集合 U を全体集合という。また、全体集合 U の部分集合 A に対して、 A に属さない U の要素全体の集合を U に関する A の補集合といい、 $\bar{A}$ で表す。また、 $A \cap \bar{A} = \phi$ 、

$A \cup \bar{A} = U$ 、 $\overline{\bar{A}} = A$ が成り立つ。



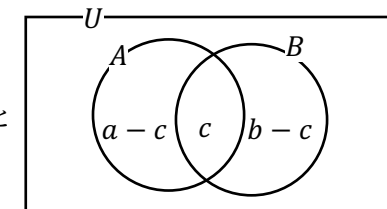
3. ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

4. 集合の個数

有限集合 P の要素の個数を $n(P)$ で表す。例えば、12の正の約数全体の集合 A は、 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ となるので、 $n(A) = 6$ となる。

また、全体集合 U の2つの部分集合 A 、 B について、 $n(A) = a$ 、 $n(B) = b$ 、 $n(A \cap B) = c$ とすると、右の図より、以下の事実が分かる。



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

◇問題

1. (1)集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ と、集合 $B = \{x \mid x \text{は} 4 \text{の正の約数}\}$ の間に成り立つ関係を、 $\subset$ 、 $=$ を用いて表せ。

(2)集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合を全て答えよ。

2. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とするとき、その部分集合 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 、 $B = \{3, 6, 9\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $\bar{A}$ (2) $\bar{B}$ (3) $\bar{A} \cap B$ (4) $A \cup \bar{B}$

3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 、 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ がそれぞれ成り立つことを、ベン図を用いて表せ。

4. 1から100までの整数のうち、3と4の少なくとも一方で割り切れる数はいくつあるか。

数学 A 第 I 章 場合の数 No.3

学習のねらい

樹形図と和の法則・積の法則を理解しよう！

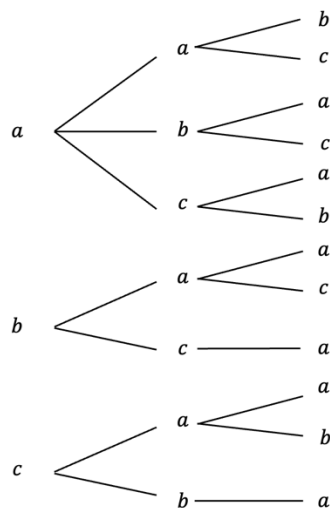
I. 樹形図

例) 4 個の文字 a, a, b, c から 3 個を選んで 1 列に並べる場合をすべて求めよ。

3 個の文字の列を 1 番目、2 番目、3 番目として、どの文字を選ぶかを考えて、文字の並べ方の全ての場合を図で表すと、右のようになる。よって、全ての場合は 12 通りである。



このように枝分かれした図を **樹形図** という。複雑な場合分けを、もれなく、また重複することなく数え上げるには、樹形図を書いて考えると便利ことが多い。



2. 和の法則・積の法則

例) コンビニで、おにぎり 3 種類と飲み物が 4 種類売っている(コンビニと呼べるか怪しいけど・・・)。このとき、

- (1) おにぎり、または、飲み物から 1 つ選ぶ方法は何通りか。
- (2) おにぎり、と、飲み物を 1 つずつ買う方法は何通りか。

(1)

「おにぎりを買う」と「飲み物を買う」は同時に起きないということだ。この「同時に起きない」がポイントである。

このとき、単純に $3 + 4 = 7$ (通り)となる。

(2)

「おにぎりを買う」しかも「飲み物を買う」ということだ。つまり同時に起きるのだ。このとき、(おにぎりの種類)×(飲み物の種類)の数だけ買うパターンは存在する。

よって、 $3 \times 4 = 12$ (通り)となる。

和の法則と積の法則は、「または」なのか「かつ(同時)」なのかを考えると、2 つの使い分けが簡単になると思う。

いよいよ本格的に、場合の数が始まったね！
本当に、気を抜くと一気に分からなくなるから
頑張っていこう！



◇問題

1. 大中小の3個のサイコロを投げるとき、目の和が5になる場合は何通りあるか。

2. 7種類のケーキと5種類の飲み物の中から、それぞれ1種類ずつ選んで、ケーキと飲み物の組みを作る方法は何通りあるか。

数学 A 第 I 章 場合の数 No.4

学習のねらい

順列とは何かを理解し、扱えるようになろう！

1. 順列

例) A、B、C、D、E の5文字から3文字を選んで並べるときの並べ方の総数は何通りか。

樹形図を書けば簡単に答えを求められる。しかしめんどくさい。そこで、何本の枝に分かれるかを考えると、 $5 \times 4 \times 3$ で求められそうということがわかる。

この5個のもののから3個を選んで並べる方法の総数を ${}_5P_3$ と表す。すなわち、 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ となる。この考え方を順列という。

順列の公式

①異なる n 個の中から r 個選んで並べるときの並べ方の総数を ${}_nP_r$ と表す。

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

②異なる n 個の中から n 個すべてを選んで並べるときの並べ方の総数を $n!$ と表し n の階乗(かいじょう)と読む。

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

③ ${}_nP_r$ を階乗の記号を用いて表すと、 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ となる。

2. 順列の考え方の利用

例) 10人の委員の中から委員長、副委員長、書記を1人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。ただし兼任は認めない。

委員長、副委員長、書記を1人ずつ選ぶ方法の総数は、10人の中から3人を選んで、この順に並べる順列の総数と考えられるから、 ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ となる。

よって、720通り。

順列は、“選んで並べる”が重要！
今後出てくる”組み合わせ”と
ごちゃごちゃしないように
注意しよう！



◇問題

1. 次の計算をせよ。

(1) ${}_6P_3$ (2) ${}_8P_4$ (3) $5!$ (4) $\frac{{}_{10}P_7}{8!}$

2. 6個の整数1、2、3、4、5、6から異なる3個を取り出して1列に並べることを考える。

(1) 3桁の整数は全部で何個できるか。

(2) 偶数は何個できるか。

(3) 4の倍数は何個できるか。

(4) 5の倍数は何個できるか。

数学 A 第 I 章 場合の数 No.5

学習のねらい

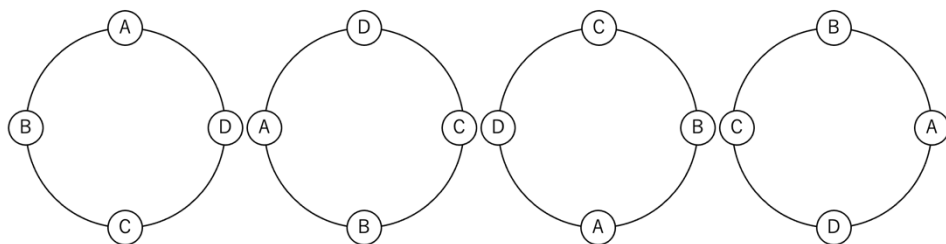
円順列、重複順列について理解して、扱えるようになるう！

1. 円順列

教科書や参考書には、「円順列の公式は $(n-1)!$ である。」と書いてあることが多い。しかし、これは全くと言って良いほど役に立たない。とにかく「仕組みを理解」しよう。

大切なのは、円順列とは「基準から見た景色が何通りあるか？」ということを意識すること。

例) A、B、C、D を円形に並べるとき並べ方の総数は何通りあるか。



この4パターンの並べ方は全て同じである。基準をAにすると、Aから見た景色は、反時計回りに $B \rightarrow C \rightarrow D$ となっているからだ。

つまり、「Aを固定して、残り3個を一行に並べる並べ方」を考えれば良いわけだ。これは $3! = 6$ (通り)である。結果として、 n 人を円形に並べるときの総数は、1人を固定しているから $(n-1)!$ となるわけだ。

2. 重複順列

例) A、B、C、D でじゃんけんをするとき手の出し方は何通りあるか。

手の出し方はグー・チョキ・パーの3種類である。Aは、グー・チョキ・パーのどれかを出す。Bもグー・チョキ・パーのどれかを出す。Cも……。となる。つまり全員3パターンずつ手の出し方がある。

よって、 $3^4 = 81$ (通り)となる。

重複順列

異なる n 個から、重複を許して r 個を取り出して並べるときの並べ方の総数は n^r 通りである。

公式ってほどではない。なのでやっぱり、仕組みを理解していこう。

仕組みを理解していこう！
問題を通して身につけてこう！



◇問題

1. 6人が6人用の円卓を囲んで座るとき、並び方は何通りあるか。

2. A、B、C、D、Eの5人が輪の形に並ぶとき、AとBが隣り合うような並べ方は、何通りあるか。

3. 4個の文字 a、b、c、d から、重複を許して3個取り出して1列に並べるとき、文字列は何通りできるか。

4. 5人を、2つの部屋 A、Bに入れる方法は何通りあるか。ただし、1人も入らない部屋があっても良いものとする。

数学 A 第 1 章 場合の数 No.6

学習のねらい

組合せとは何かを理解し、扱えるようになろう！！

例) A、B、C、D、E の 5 文字から 3 文字を選ぶとき、選び方の総数は何通りあるか。

順列との違いはわかるだろうか。順列は「選んで並べる」だったのに対し、今回は、「選び方」について問われている。

簡単に言うと、(A、B、C)と(C、B、A)が同じということだ。

順列として考えると
 $3! = 6$ 通り

組合せとして考えると
1通り

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

つまり、5 文字から 3 文字選んで、グループ分けをすると、

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
ACB	ADB	AEB	ADC	AEC	AED	BDC	BEC	BED	CED
BAC	BAD	BAE	CAD	CAE	DAE	CBD	CBE	DBE	DCE
BCA	BDA	BEA	CDA	CEA	DEA	CDB	CEB	DEB	DEC
CAB	DAB	EAB	DAC	EAC	EAD	DBC	EBC	EBD	ECD
CBA	DBA	EBA	DCA	ECA	EDA	DCB	ECB	EDB	EDC

になる。全部で10通り出てきた。これは、

$$\frac{5 \text{ 人から } 3 \text{ 人選んで並べたときの総数}}{3 \text{ 人を並べたときの並べ方}} = \frac{{}_5P_3}{3!}$$

となる。5 人から 3 人選ぶときの、選び方の総数を ${}_5C_3$ と表すと、

$${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} \text{ と計算することができる。}$$

組合せの公式

異なる n 個の中から r 個を選ぶときの、選び方の総数を ${}_nC_r$ と表す。

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

また、以下の性質がある。

$$1. {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad 2. {}_nC_1 = n \quad 3. {}_nC_n = 1 \quad 4. {}_nC_0 = 1$$

簡単に確認する。

1.は、例えば、 ${}_5C_3$ とは、異なる 5 個のものから 3 つを選ぶということ。つまり、異なる 5 個のものから選ばないものを 2 つ選ぶと考えても良い。よって、 ${}_5C_3 = {}_5C_2$ ということだ。

2.は、異なる n 個の中から 1 個を選ぶという意味だから当然この結果である。

3.は、異なる n 個の中から n 個を選ぶ、つまり全部選ぶわけだ。つまり、1 通りしかない。

4.は、「何も選ばない」ということなので、何も選ばない 1 通りである。

この約束事は、頻繁に使うのでしっかり慣れておこう。

◇問題

1. 次の計算をせよ。

(1) ${}_7C_5$ (2) ${}_{10}C_8$ (3) ${}_4C_4$ (4) ${}_9C_0$

2. 男子 5 人、女子 4 人の中から、3 人を選びグループを作る。次の問いに答えよ。

(1) 3人グループは全部で何通り作れるか。

(2) 男子から2人女子から1人を選ぶとき、何通りのグループが作れるか。

(3) 男子が少なくとも1人含まれるように選ぶとき、何通りのグループが作れるか。

数学 A 第 1 章 場合の数 No.7

学習のねらい

同じものを含む順列・重複組合せについて理解しよう！

1. 同じものを含む順列

例) A、A、A、B、C の 5 文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

5!ではない。あれらは「異なる n 個」であって、今回は、A が 3 個もあるので、アプローチを変えなければならない。

この 3 文字を区別できるとしてみよう。すると、 $5! = 120$ 通り。すると、右図のように、なる。ここ

で、グループごとに見てみると、
例えば、一番左のグループは、
全てが、AAABC という並びに

$A_1A_2A_3BC$	$BA_1A_2A_3C$	$A_1BA_2A_3C$	$A_1A_2BA_3C$
$A_1A_3A_2BC$	$BA_1A_3A_2C$	$A_1BA_3A_2C$	$A_1A_3BA_2C$
$A_2A_1A_3BC$	$BA_2A_1A_3C$	$A_2BA_1A_3C$	$A_2A_1BA_3C$
$A_2A_3A_1BC$	$BA_2A_3A_1C$	$A_2BA_3A_1C$	$A_2A_3BA_1C$
$A_3A_1A_2BC$	$BA_3A_1A_2C$	$A_3BA_1A_2C$	$A_3A_1BA_2C$
$A_3A_2A_1BC$	$BA_3A_2A_1C$	$A_3BA_2A_1C$	$A_3A_2BA_1C$

…
なっている。つまり、「一旦別々のものだと思って並べる総数を考えて、その後、同じものの並び方をグループ分けする。」ことで求められる。

今回の場合だと、5!で一旦並べてあげて、 $A_1A_2A_3$ の並び変えを無視する、つまり3!で割ってあげると答えが求まるということだ。

同じものを含む順列

n 個のもののうちで、 p 個が同じ、 q 個が同じ、 r 個が同じであるとき
(何個でも仕組みは同じ)、 n 個の並べ方の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

2. 重複組合せ

例) りんご、なし、ももの 3 つのフルーツから、重複を許して 5 個のフルーツを選ぶ。選び方は何通りあるか求めよ。ただし、1 つも選ばれないものがあったても良いものとする。

まず、右図のように、フルーツを○で表す。
りんご、なし、ももの 3 種類があるので、仕切りを 2 つ用意して、3 個の部屋を用意する。上の図だと、(りんご、なし、もも) = (2, 2, 1) となる。



では、右図になるとどうなるか？これだと、(りんご、なし、もも) = (0, 4, 1) となる。



このように、○と|を使って、並び方が何通りあるかを考えられれば、良いわけだ。この図だと、7 個のもの(○と|)のうちで、○が 5 個同じ、|が 2

個同じであるから、 $\frac{7!}{5!2!}$ で求めることができる。

「重複組合せ」は、実は、「同じものを含む順列」を考えていたのだ。

大事なポイントは、仕切りの数は、最小限にすることだ。

場合の数・確率が苦手な人ほど、「とにかく公式！」と考える人が多いのよね～。確かに解ける問題もあるけれど、大事なことは、仕組みを理解すること！！

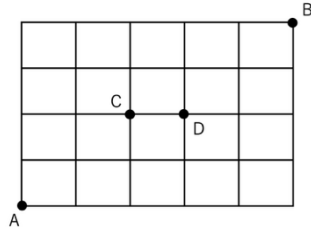
分からなかったら、周りの人に聞くんだよ～。



◇問題

1. 右の図のような街路のある町があり、
A 地点から B 地点まで、最短距離で行く
ものとする。

- (1) 全体の道筋は何通りあるか。
(2) C 地点を通らない道筋は何通りあるか。
(3) C 地点または D 地点を通る道筋は何通りあるか。



2. 次の問いに答えよ。

- (1) $x + y + z = 10$ となる、0以上の整数(x, y, z)の組合せの総数を求めよ。
(2) $x + y + z = 10$ となる、自然数(x, y, z)の組合せの総数を求めよ。
(3) $x + y + z \leq 10$ となる、0以上の整数(x, y, z)の組合せの総数を求めよ。