

数学 A 第 2 章 確率 No. 1

学習のねらい

確率の定義をきちんと理解しよう！

1.2 種類の確率論

確率は、日常の様々な場面で用いられている。例えば、降水確率や合格判定など。このような確率を、統計的確率論という。一方、この章で学ぶのは、組合せ的確率論だ。

確率は、「場合の数」ができないと詰む。なので、うまく解けないなと思った際には、ぜひ場合の数を復習してみたい。

確率を考える際には、「サイコロを投げる」や「カードを引く」などの行為が行われる。このような実験や、観測などを試行(しこう)といい、その結果起こる事柄を事象(じしょう)という。

2. 同様に確からしい・確率の定義

中学でも習ったこの言葉。例えば、「受験の結果は合格か不合格かの 2 通りしかないから、合格可能性は 50%だ！」という主張は間違っていることが分かる。合格と不合格の 2 通りが、同様に確からしくないからだ。

例えばサイコロなどの 1~6 までの出る確率が全て同じの時、つまり、1 つ 1 つの事柄が等確率で起きる時、同様に確からしいという。

では、確率の定義をしよう。

確率の定義

- ・ある試行を行ったときに、起こりうる全ての事象を U とし、 U の場合の数を $n(U)$ と表す。ただし U の全ての根元事象は同様に確からしいとする。
- ・その試行のうち、事象 A が起こる場合の数を $n(A)$ と表す。このとき、 A が起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうる全ての場合の数}}$$

3. 確率は同じものでも区別して考える

例) 白い球を 4 つ、黒い球を 2 つを箱の中に入れ、無作為に 2 つを同時に取り出す。このとき、取り出した 2 つの球がともに白色である確率を求めよ。

(白、白)、(白、黒)、(黒、白)、(黒、黒) の 4 通りだから $\frac{1}{4}$ 。

(白、黒)、(黒、白) は同じだから、3 通りで $\frac{1}{3}$ 。

この 2 つの解答は同様に確からしいという観点が抜けている。確率で大事なものは、同じものでも区別して考える！ ことだ。

正しい解答は、6 個の全ての球を区別して考えると、2 個を取り出すときの取り出し方の総数は、 ${}_6C_2 = 15$ 通り。そのうち、白い球を 2 個取り出す場合の数は、 ${}_4C_2 = 6$ 通り。よって、求める確率は、 $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ である。

とにかく、同じものでも区別して考える！ こと！

◇問題

1. 袋の中に赤玉3個と白玉4個が入っている。この袋から4個の玉を同時に取り出したとき、それらが赤玉2個と白玉2個である確率を求めよ。

2. 2枚の硬貨を投げる。次の問いに答えよ。

(1) 2枚とも表が出る確率を求めよ。

(2) 表と裏が各1枚出る確率を求めよ。

3. 袋の中に青玉4個、黄玉3個、赤玉2個が入っている。この袋から同時に4個の玉を取り出すとき、そのうちの2個の玉だけが同色になる確率を求めよ。

数学 A 第 2 章 確率 No.2

学習のねらい

余事象と排反事象と独立試行について理解しよう！

1. 余事象

全事象を U とする。事象 A に対して、「 A が起こらない事象」のことを A の **余事象** といい、 $\bar{A}$ と表す。

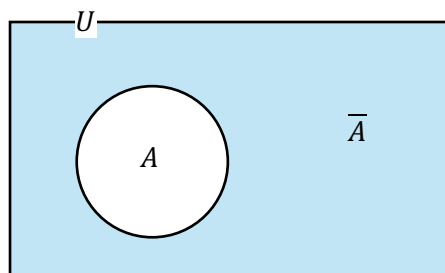
事象 U が起きる確率 $P(U)$ は 1 である。つまり、 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ である。

これを用いると、一見難しそうな問題も、簡単に解くことができる。問題文に「少なくとも」というワードが出てきたら、余事象を考えてみよう！

例) 白玉 4 個と赤玉 6 個が箱に入っている。この中から 3 つの玉を取り出すとき、少なくとも 1 つの白玉を含んでいる確率を求めよ。

「少なくとも」がきたので余事象を考えてみよう。つまり、「1 つも白玉を含んでいない」＝「赤玉だけ」ということ。

よって、10 個の玉から 3 個を取り出す確率が ${}_{10}C_3 = 120$ 通り。赤玉だけを取り出す確率が ${}_6C_3 = 20$ 通り。よって、赤玉だけを取り出す確率は、 $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ 。よって、 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 。最後に 1 から引くのを忘れなく。



2. 排反事象

1 個のサイコロを投げる試行において、「偶数の目が出る」という事象と「3 の目が出る」という事象は同時には起こらない。このように、同時に起こらない時、2 つの事象を互いに **排反事象** であるという。

3. 独立試行

この概念は少し難しい。というのも、排反事象とは別の概念なのに、似ているからだ。なので、少し納得がいかなかったかもしれないが、「こういうものだ」としてそのまま受け入れて欲しい。

1 個のサイコロを投げる試行と、1 枚のコインを投げる試行を考えてみよう。サイコロの目の出方と、コインの表裏の出方は、無関係だ。このような試行を **独立試行** という。

そして、独立試行に関しては、以下の定理が成り立つ。

2 つの独立な試行 S と T を行うとき、 S では事象 A が起き、 T では事象 B が起きるとする。2 つの事象 A 、 B がともに起きるとき、その確率は $P(A)P(B)$ である。

超簡単に言うと、排反事象の時は、足し算。独立試行の時は、掛け算である。排反事象は、1 つのモノに対して、「この場合とあの場合」と考えるのに対し、独立試行は、互いの事象に対して、互いが影響を及ぼさないわけだ。こうしてみると、全然違うのだが、受け入れ難いのではないだろうか・・・。

独立試行に関してもう少し説明する。場合の数の章でやった、事象 A が起きて、“かつ”事象 B が起きる確率は $P(A)P(B)$ の、“かつ”の話と同じである。

◇問題

1. 1 から 50 までの番号をつけた 50 枚のカードから 1 枚を取り出すとき、次の事象のうち互いに排反事象であるものはどれとどれか。

A : 6 の倍数の番号が出る。 B : 偶数の番号が出る。

C : 7 の倍数の番号が出る。 D : 50 の約数の番号が出る。

2. 10 本のくじがあり、そのうち 2 本が当たりくじである。A 君、B 君、C 君がこの順で 1 本ずつくじを引く。ただし引いたくじは元に戻さないものとする。

(1) このとき、C 君が当たる確率を求めよ。

(2) 3 人のうち少なくとも 1 人が当たる確率を求めよ。

数学 A 第 2 章 確率 No.3

学習のねらい

反復試行の確率について理解しよう！

同じ試行を何回か繰り返し行うことを反復試行という。例を見て確認していこう！

例) 1 個のサイコロを繰り返し 5 回投げる。このとき、1 の目が 3 回出る確率を求めよ。

1 回目で投げたサイコロの結果と 2 回目で投げたサイコロの結果は、互いに影響を与えない。よって、No.2 で解説した”独立試行”になっている。

まず、1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ で、1 以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ 。具体的に、

1 の目が 5 回中 3 回出る確率を考えてみよう。例えば、「1、3、5 回目に 1 が出て、2、4 回目には 1 以外の目が出る」パターンを考えてみよう。

すると、右の表のようになる。

このときの確率を求めてみよう。単純に、

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \text{ となる。}$$

さて、○が 3 回、×が 2 回起きるとき、というのは、この並び以外のときもあるよね？

回	1	2	3	4	5
結果	○	×	○	×	○

右の表のように、何パターンも存在する。

では何パターン存在するのだろうか？

○が 3 個、×が 2 個の並び替えの

総数は、同じものを含む順列だね。

ということで、

$\frac{5!}{3!2!}$ 通りの並び方があるわけだ。

よって、求める確率は、

$$\frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888} \text{ となる。}$$

ということで、反復試行の確率の公式を書くな。

1 回の試行で事象 A が起きる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行うとき、事象 A が r 回起きる確率は、

$(\text{並び替えの総数}) \times (1 \text{ つの例が起きる確率})$
で計算できる。



反復試行は数学 I のデータの分析でも

使うから、侮れない・・・。

◇問題

1. S 君がダーツの矢を投げるとき、 $\frac{9}{10}$ の確率で狙ったところに当たる。

S 君が同じ条件で 3 回繰り返しダーツの矢を投げたとき、

- (1) 狙ったところにちょうど 2 回当たる確率を求めよ。
- (2) 狙ったところに 2 回以上当たる確率を求めよ。

2. A、B の 2 人が 1 枚の硬貨を交互に投げるゲームを行う。A が最初に硬貨を投げ、先に表を 3 回出した人が勝つものとする。

- (1) A が硬貨を 3 回投げて勝つ確率を求めよ。
- (2) B が硬貨を 3 回投げて勝つ確率を求めよ。
- (3) A が 4 回、B が 3 回硬貨を投げて A が勝つ確率を求めよ。

数学 A 第 2 章 確率 No.4

学習のねらい

条件付き確率を理解しよう！

今回は、とある物語から始めよう。

去年の卒業生にアンケートを取ってみた。

「文化祭後に、気になっていた人と実際に付き合いましたか？」
その結果、**付き合う確率は 22%**という結果になった。
しかし、A さんが気になっている B さんは同じ委員会の人であった。
するとアンケートをきちんと見た先生が言った。

先生 「B さんと付き合いたいんでしょ？いけるかもよ。」

A 「えっ！！なんでですか？！ 22%ですよ！振られたくない！」

先生 「実は、“同じ委員会だった人”だけで見ると、
結果が変わるかもしれないよ。」

まあ、「そもそも恋愛の話確率にすんな！」と何処かから怒られそうではあるが・・・2 人が見ていた結果はこんな感じ！

だんだんややこしくなってきたね・・・



	付き合った	付き合わなかった	合計
同じ委員会だった	18	22	40
同じ委員会ではなかった	4	56	60
合計	22	78	100

今回の状況だと、同じ委員会の人の中(=分母) で付き合った人(=分子)の確率を求めたいわけだ。つまり $\frac{18}{40}$ だから、45%となるわけだ。

ある事象 A が起こるという条件の下で事象 B が起こる確率を条件付き確率といい、 $P_A(B)$ で表す。

先の例なら、事象 A：同じ委員会だった、事象 B：付き合ったということだ。そしてこれには公式がある。

事象 A という条件の下で、事象 B が起きる条件付き確率は、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

として求められる。

条件付き確率の問題は、ベン図や、表を書くと分かりやすくなる時が多い。実際に◇問題を解いて、解説を見て、できるようになって欲しい。また、この公式を変形した ver. もよく用いられる。

2 つの事象 A、B が共に起こる確率 $P(A \cap B)$ は、

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

として求められる。

◇問題

1. とあるパーティの参加者は、日本人が全体の 60%、日本人男性が全体の 42%である。参加者から日本人を選ぶとき、それが男性である確率を求めよ。

2. 当たりを 3 本含む、10 本のくじを A さん、B さんが順番に引く。引いたくじは元に戻さないとき、2 人とも当たりくじを引く確率を求めよ。

3. ある製品を製造する工場 A、B があり、A の製品には 3%、B の製品には 4%の不良品が含まれている。A の製品と B の製品を、4 : 5 の割合で混ぜた大量の製品の中から 1 個を取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) それが不良品である確率

(2) 不良品であったときに、それが A の製品である確率

数学 A 第 2 章 確率 No.5

学習のねらい

期待値について理解しよう！

宝くじってあるよね。でも宝くじ会社も儲けているのだから、何カラクリがあるわけだ。そこで登場するのが期待値なのだ！

例) 1 回 300 円のくじがある。

	当選金額	本数	当選確率
特賞	1000 円	1 本	$\frac{1}{20}$
2 等	500 円	2 本	$\frac{2}{20}$
3 等	100 円	5 本	$\frac{5}{20}$
ハズレ	0 円	12 本	$\frac{12}{20}$

このくじは得か？損か？

得なのか損なのかを考えるということは、「1 回あたり平均して何円返ってくるか？」を考えれば良い。例えば特賞 1000 円は、20 回のうち 1 回だけ当たるので、1 回あたり平均すると 50 円分と考える。これを全て

でやると、

$$1000 \times \frac{1}{20} + 500 \times \frac{2}{20} + 100 \times \frac{5}{20} + 0 \times \frac{12}{20} = 125$$

となるので、1 回あたり 125 円しか得られないということだ。1 回 300 円も払っているのに、125 円しか返ってこないのは損だ！ということ。

もう一つの考え方もあって、「一旦 20 回引いて得られたお金の和を÷20する」でも良いよね。つまり、

$$\frac{1}{20}(1000 \times 1 + 500 \times 2 + 100 \times 5 + 0 \times 12) = 125$$

となるわけだ。

このように、ある試行を多数回繰り返したときに、1 回あたり平均して得られる値を期待値という。

右の表のとき、 X の期待値 E は、

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

ただし、 $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

X の値	x_1	x_2	x_3	……	x_n	合計
確率	p_1	p_2	p_3	……	p_n	1

ちなみに、某有名な宝くじは、購入金額 300 円で 150 円くらいの期待値になるらしい。まあ期待値だけでは測れない価値も世の中にはある。

これにて第 2 章確率が終わり！！！！

次は図形！！



◇問題

1. 1個のサイコロを1回投げるとき、出る目を X とする。このとき、 X の各値と、 X がその値をとる確率 P は、右の表のようになる。このとき、 X の期待値 E を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6	合計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2. 1枚の硬貨を3回続けて投げるとき、表が出る回数を X とする。このとき、 X の期待値を求めよ。