

# 数学 A 第 3 章 図形の性質 No.1

## 学習のねらい

線分の内分・外分について理解しよう！

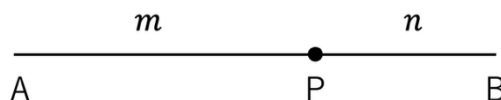
内角または外角の二等分線と比について理解しよう！

### 1. 内分・外分

$m, n$  を正の数とする。点  $P$  が

線分  $AB$  上にあって

$$AP : PB = m : n$$

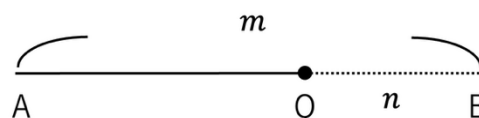


が成り立つとき、点  $P$  は線分  $AB$  を  $m : n$  に内分するという。

また、点  $Q$  が線分  $AB$  の延長上

にあって

$$AQ : QB = m : n$$



が成り立つとき、点  $Q$  は線分  $AB$  を  $m : n$  に外分するという。このとき、 $m \neq n$  である。

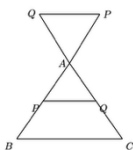
### 2. 角の二等分線と比

$\triangle ABC$  の辺  $AB, AC$  上に、それぞれ点  $P, Q$  があるとき、次のことが成り立つ。

$$1 \quad PQ \parallel BC \Leftrightarrow AP : AB = AQ : AC$$

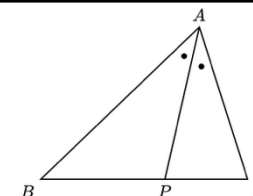
$$2 \quad PQ \parallel BC \Leftrightarrow AP : PB = AQ : QC$$

$$3 \quad PQ \parallel BC \Rightarrow AP : AB = PQ : BC$$



三角形の内角の二等分線と比についての定理がある。

$\triangle ABC$  の  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点  $P$  は、辺  $BC$  を  $AB : AC$  に内分する。  
つまり  $BP : PC = AB : AC$



証明

点  $C$  を通り直線  $AP$  に平行な直線を引き、辺  $AB$  の  $A$  を超える延長との交点を  $D$  とすると、 $AP \parallel DC$  から、

$$\angle BAP = \angle ADC, \angle PAC = \angle ACD$$

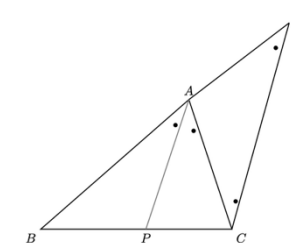
一方、 $\angle BAP = \angle PAC$  であるから

$$\angle ADC = \angle ACD$$

よって、 $AD = AC \dots ①$

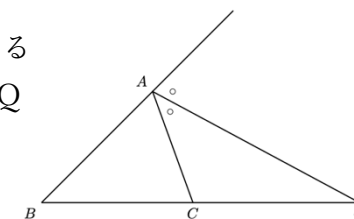
また、 $AP \parallel DC$  であるから  $BP : PC = BA : AD \dots ②$

①、②より、 $BP : PC = AB : AC$



三角形の外角の二等分線と比についての定理もある。

$AB \neq AC$  である  $\triangle ABC$  の頂点  $A$  における外角の二等分線と辺  $BC$  の延長との交点  $Q$  は、辺  $BC$  を  $AB : AC$  に外分する。  
つまり  $BQ : QC = AB : AC$



注)  $\triangle ABC$  において、 $AB = AC$  のとき、頂点  $A$  における外角の二等分線と辺  $BC$  は平行になる。

## ◇問題

1.  $PQ=7$ 、 $QR=5$ 、 $RP=3$ である $\triangle PQR$ において、 $\angle P$  およびその外角の二等分線が辺  $QR$  またはその延長と交わる点を、それぞれ  $S$ 、 $T$  とする。次の問いに答えよ。
  - (1)  $QS$  と  $SR$  の比を求めよ。
  - (2)  $QT$  と  $TR$  の比を求めよ。
  - (3)  $ST$  を求めよ。

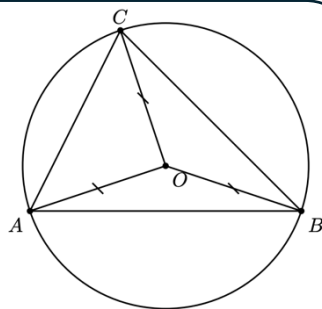
## 数学 A 第 3 章 図形の性質 No.2

### 学習のねらい

三角形の五心(外・内・垂・重・傍)について理解して性質を覚えよう！

#### 1. 外心

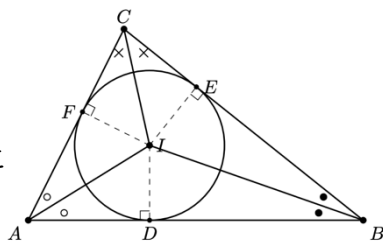
三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わり、その点は 3 つの頂点から等距離にある。よって点  $O$  を中心として、3 つの頂点を通る円が存在する。この円を三角形の外接円と言い、外接円の中心を外心という。



#### 2. 内心

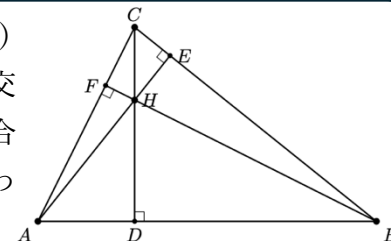
三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わり、その点は 3 辺から等距離にある。つまり  $ID=IE=IF$  である。

よって点  $I$  を中心として  $\triangle ABC$  の 3 辺に点  $D, E, F$  で接する円が存在する。この円を三角形の内接円と言い、内接円の中心を内心という。三角形の内心は、3 つの内角の二等分線が交わる点である。



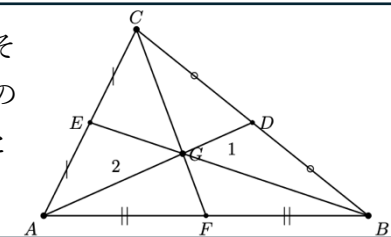
#### 3. 垂心

三角形の各頂点から向かい合う辺(対辺)またはその延長に下ろした垂線は 1 点で交わる。三角形の 3 つの頂点から、向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線が交わる点を、三角形の垂心という。



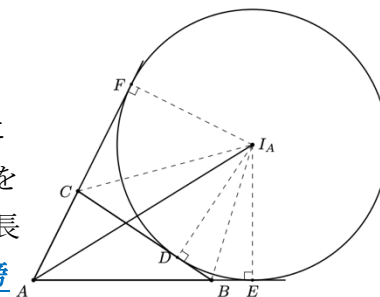
#### 4. 重心

三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり、その点は各中線を  $2:1$  に内分する。三角形の 3 本の中線が交わる点を、三角形の重心という。



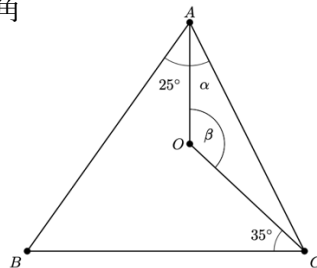
#### 5. 傍心

三角形の 1 つの内角の二等分線と残り 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わり、その点は 3 辺またはその延長から等距離にある。つまり点  $I_A$  とすると、3 辺またはその延長に下ろした垂線の長さは等しい。よって点  $I_A$  を中心として、 $\triangle ABC$  の 1 辺と、他 2 辺の延長に接する円が存在する。この円を三角形の傍接円といい、傍接円の中心を傍心という。

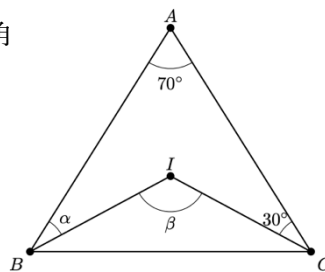


## ◇問題

1.  $\triangle ABC$  の外心を  $O$  とするとき、右の図の角  $\alpha$ 、 $\beta$  を求めよ。



2.  $\triangle ABC$  の内心を  $I$  とするとき、右の図の角  $\alpha$ 、 $\beta$  を求めよ。



3.  $\triangle ABC$  の垂心を  $H$  とする。 $\angle A = 70^\circ$ 、 $\angle B = 50^\circ$  のとき  $\angle BHC$  を求めよ。

4.  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし、2 点  $A$ 、 $G$  から直線  $BC$  に下ろした垂線を、それぞれ  $AH$ 、 $GK$  とする。

(1)  $AH : GK$  を求めよ。

(2) 面積比  $\triangle ABC : \triangle GBC$  を求めよ。

5.  $\triangle ABC$  の傍心を  $I_A$  とする。 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 40^\circ$  のとき、 $\angle BI_A C$  を求めよ。

## 数学 A 第 3 章 図形の性質 No.3

### 学習のねらい

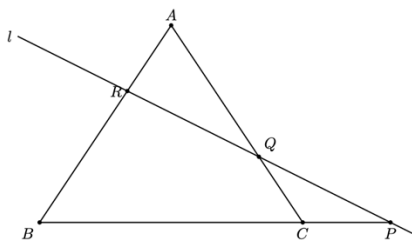
メネラウスの定理とチェバの定理を理解しよう！

三角形と直線について次のメネラウスの定理が成り立つ。

△ABC において、直線  $l$  が、辺 AB、BC、CA またはその延長とそれぞれ点 R、P、Q で交わるとき、

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

となる。



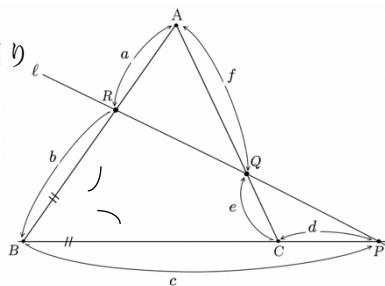
Step.1 キツネを見つける。

Step.2 耳の先からスタートして、顔の周りに「→」を順番に書く。

Step.3 そのとき、耳を 1 枚 CUT する。

Step.4 順番に番号を記入し、番号順に

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1 \text{ で完成！}$$

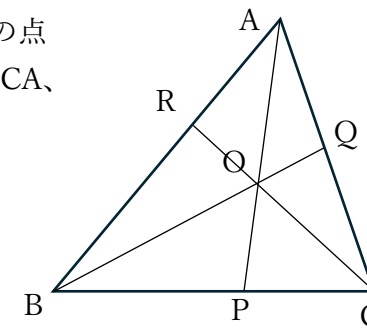


注) 通過させたい方の耳の先から「→」をスタートさせるのがポイント。

また以下ような図においてチェバの定理が成り立つ。

△ABC の頂点 A、B、C と三角形の内部の点 O を結ぶ直線 AO、BO、CO が、辺 BC、CA、AB とそれぞれ点 P、Q、R で交わるとき、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



### Topic—マインド

高校受験が終わったと思ったら、すぐに大学受験がやってくる。嫌だね。まあ、僕は高校受験を頑張らなかった人だから、なんとも言えないんだけど。大学受験は青春だったかなあと今は思える。

このプリントを使っている多くの人は高校生だと思うのだけど、まさに高校生の方々に言いたい！！

勉強はこの世の中にある唯一フェアなもの、だと。いや本当に。地頭の良さとか、あるじゃん。最悪だよ。でもね。僕らは天才になれなくても秀才になることはできる。

もちろん、数学が得意じゃなくたっていい。ただ、高校までの数学は頑張れば誰でもできるように作られていると思う。(大学数学をやったからそう思う。)

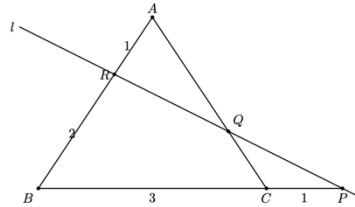
一緒に頑張りましょ！！！！

## ◇問題

1. 右の図において、 $AR:RB = 1:2$ 、 $BC:CP = 3:1$ 、とする。

(1)  $CQ:QA$ を求めよ。

(2)  $PQ:QR$ を求めよ。



2.  $\triangle ABC$  の辺  $AB$  を  $1:3$  に内分する点を  $R$ 、辺  $AC$  を  $2:3$  に内分する点を  $Q$  とする。線分  $BQ$  と線分  $CR$  の交点を  $O$ 、直線  $AO$  と辺  $BC$  の交点を  $P$  とする。

(1)  $BP:PC$  を求めよ。

(2)  $\triangle OBC:\triangle ABC$  を求めよ。

## 数学 A 第 3 章 図形の性質 No.4

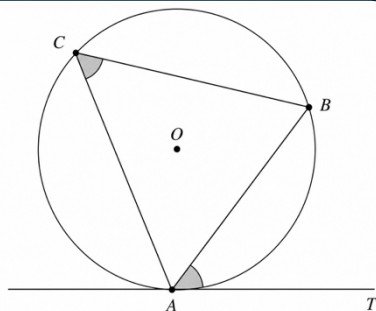
### 学習のねらい

接弦定理と方べきの定理を理解しよう！

#### 1. 接弦定理

円の接線と弦の作る角について、次が成り立つ。

円 O の弦 AB と、その端点 A における接線 AT が作る角  $\angle BAT$  は、その角の内部に含まれる弧 AB に対する円周角  $\angle ACB$  に等しい。



証明

$\angle BAT$  が鋭角の場合

円 O の周上に、AD が円 O の直径となるように点 D をとると、  
 $AD \perp AT$ 、 $\angle ABD = 90^\circ$  であるから、

$$\angle BAT = 90^\circ - \angle BAD \quad \angle ADB = 90^\circ - \angle BAD$$

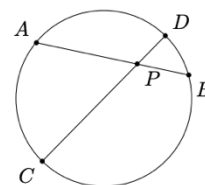
これより  $\angle BAT = \angle ADB$ 。

$\angle ACB$  と  $\angle ADB$  は弧 AB に対する円周角であるから  $\angle ADB = \angle ACB$

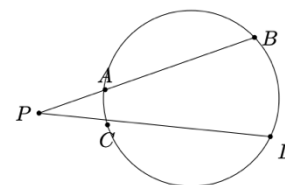
よって、 $\angle BAT = \angle ACB$ 。

#### 2. 方べきの定理

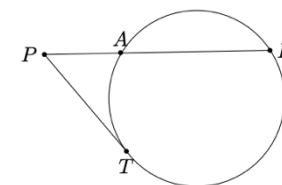
方べきの定理は簡単に言うと、「円と線分の長さの関係」。3 パターンある。



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



$$PA \cdot PB = PT^2$$

証明

左の図のみ証明する

$\triangle PAC$  と  $\triangle PDB$  において

$$\angle APC = \angle DPB \quad \angle PAC = \angle PDB$$

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

よって

$$PA : PD = PC : PB$$

ゆえに

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

図形って色々な定理が出てくるから大変だね。

1 個 1 個できるようになっていこう！！



## ◇問題

1. 円  $O$  の外部の点  $P$  から円  $O$  に接線を引き、その接点を  $A$ 、 $B$  とし、線分  $PB$  の  $B$  を超える延長上に点  $Q$  をとる。また、円  $O$  の周上に点  $C$  を、 $PB$  と  $AC$  が平行になるようにとる。 $\angle APB = 30^\circ$  であるとき、 $\angle CBQ$  の大きさを求めよ。

2. 円に内接する四角形  $ABCD$  があり、 $AB = 10$ 、 $AD = 8$ 、 $\angle BAC = \angle DAC$  である。また、 $AC$  と  $BD$  の交点を  $E$  とすると、 $AE = 4$  である。
  - (1)  $AC$  の長さを求めよ。
  - (2)  $BE : ED$  を最も簡単な整数の比で表せ。
  - (3)  $BD$  の長さを求めよ。

## 数学 A 第 3 章 図形の性質 No.5

### 学習のねらい

多面体について理解しよう！

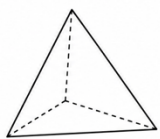
三角柱、四角錐などのように、いくつかの平面で囲まれた立体を多面体といい、へこみのない多面体を凸多面体という。

次の 2 つの条件を満たす多面体を正多面体という。

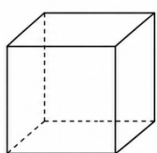
[1] 各面は全て合同な正多角形である。

[2] 各頂点に集まる面の数は全て等しい。

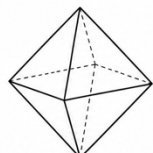
正多面体は以下の 5 種類しかないことが知られている。



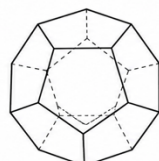
正四面体



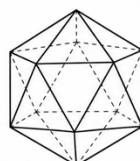
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

では、面の形・面の数・1 頂点に集まる面の数・頂点の数・辺の数を表にまとめてみよう。

これにて図形終わり！！

次は整数のお話！



| 立体    | 面の形  | 面の数 | 1 頂点に<br>集まる面の数 | 頂点の数 | 辺の数 |
|-------|------|-----|-----------------|------|-----|
| 正四面体  | 正三角形 | 4   | 3               | 4    | 6   |
| 正六面体  | 正方形  | 6   | 3               | 8    | 12  |
| 正八面体  | 正三角形 | 8   | 4               | 6    | 12  |
| 正十二面体 | 正五角形 | 12  | 3               | 20   | 30  |
| 正二十面体 | 正三角形 | 20  | 5               | 12   | 30  |

実は、とあることが成り立っている・・・。

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2$$

になっている。

これをオイラーの多面体定理という。

一般に、凸多面体の頂点、辺、面の数を、それぞれ  $v$ 、 $e$ 、 $f$  とすると

$$v - e + f = 2$$

が成り立つ。

まず面の数を調べるのは割と簡単。そして頂点の数を調べるのも、まあ簡単なかな？？辺の数を調べるのはマジでだるい。(正四面体・正六面体ならまだ耐えるけど。)

だから、オイラーの多面体定理を使って求めていこう！ってことだ。

## ◇問題

1. 次の表を完成させよ。

| 立体    | 面の数 | 頂点の数 | 辺の数 |
|-------|-----|------|-----|
| 正四面体  | 4   | 4    |     |
| 正六面体  | 6   | 8    |     |
| 正八面体  | 8   | 6    |     |
| 正十二面体 | 12  | 20   |     |
| 正二十面体 | 20  | 12   |     |

2. 一辺の長さが $a$ の正四面体  $OABC$  において、点  $O$  から平面  $ABC$  に下ろした垂線の足を  $H$  とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 底面  $\triangle ABC$  の面積  $S$
- (2) 高さ  $OH$  の長さ  $h$
- (3) 正四面体  $OABC$  の体積  $V$
- (4) 正四面体  $OABC$  の内接球の半径  $r$
- (5) 正四面体  $OABC$  の外接球の半径  $R$

