

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No. 1

学習のねらい

約数と倍数について理解しよう！

素数と素因数分解についての性質を理解しよう！

1. 約数と倍数

2 つの整数 a 、 b について、ある整数 k を用いて、 $a = kb$ と表されるとき、 b は a の 約数 であるといい、 a は b の 倍数 であるという。

2. 倍数の判定法

2 の倍数	一の位が 0、2、4、6、8 のいずれか
3 の倍数	各位の数の和が 3 の倍数
4 の倍数	下 2 桁が 4 の倍数
5 の倍数	一の位が 0 か 5
8 の倍数	下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数	各位の数の和が 9 の倍数
10 の倍数	一の位が 0

実は、7 の倍数の判定法と 11 の倍数の判定法もあるのだけど、普通に計算した方が早くない？と僕は思っているのと、あんまり使う場面がないので、気になった人はぜひ調べてみてね。

3. 素数と素因数分解

2 以上の自然数で、1 とそれ自身以外に正の約数を持たない自然数を 素数 という。また、2 以上の自然数で、素数でないものを 合成数 という。なお、1 は素数でも合成数でもない。また、自然数を素数だけの積の形に表すことを 素因数分解 するという。

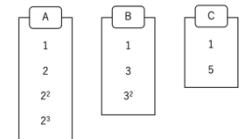
4. 約数の公式

例) (1) 360 の約数の個数を求めよ。(2) 360 の約数の総和を求めよ。

(3) 360 の約数を全て掛けた時の値は 360^k となる。 k の値を求めよ。

360 を素因数分解すると、 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 。

(1) 右の図のように素数それぞれをグループに分けると、A から 1 つ、B から 1 つ、C から 1 つずつ選ばそれが自動的に 360 の約数になるので $4 \times 3 \times 2 = 24$ (個) である。



(2) $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5)$ を考えると、これを展開したときの項は 360 の約数となる。よってこれを計算して、 $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170$

(3) 約数のペアを掛け算すると必ず 360 となる。よって、360 のペアの個数乗となるので、 $k = 24 \div 2 = 12$ である。

自然数 $N = p^a q^b r^c \dots$ (p, q, r は異なる素数とする) となるとき、

(約数の個数) $= (1 + a)(1 + b)(1 + c) \dots$

(約数の総和) $= (1 + p + \dots + p^a)(1 + q + \dots + q^b)(1 + r + \dots + r^c) \dots$

(約数の総積) $= N^{\frac{\text{約数の個数}}{2}}$

◇問題

1. 次の問いに答えよ。

(1) 4桁の自然数 $52\square 9$ が3の倍数のとき、 $\square$ に入る数字を全て求めよ。

(2) $\sqrt{\frac{360}{n}}$ が自然数となるような自然数 n を全て求めよ。

2. 360の正の約数のうち偶数であるものの総和を求めよ。

3. n を自然数とする。 $n^2 + 2n - 24$ が素数となるような n を求めよ。

4. 12^n の正の約数の個数が28個であるような自然数 n を求めよ。

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No.2

学習のねらい

最大公約数・最小公倍数を理解しよう！

整数の割り算について理解しよう！

1. 最大公約数・最小公倍数

2 つ以上の整数に共通な約数を、それらの整数の公約数といい、公約数のうち最大のものを最大公約数という。

例えば、16 と 9 の正の公約数は 1 だけである。つまり最大公約数は 1 である。2 つの整数の最大公約数が 1 のとき、これらの整数は互いに素であるという。

また、2 つ以上の整数に共通な倍数を、それらの整数の公倍数と言い、公倍数のうち正で最小のものを最小公倍数という。

例) 72 と 240 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

$72 = 2^3 \times 3^2$ $240 = 2^4 \times 3 \times 5$ となる。二つの数のうち、それぞれの指数が小さい方の値を採用すると、

$$2^3 \times 3 = 24$$

となるので、最大公約数は 24 である。

それぞれの指数が大きい方の値を採用すると、

$$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

となるので、最小公倍数は 720 である。

2. 整数の割り算

割り算の式を

$$a \div b = q \cdots r$$

だと思っている人が多いように思う。しかし…なんていう演算は無い。

割り算の本当の式はこれ！！

整数 a と正の整数 b に対して、

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

を満たす整数 q と r がただ 1 通りに定まる。

$0 \leq r < b$ というのは、 $15 = 6 \times 2 + 3$ のところを $15 = 6 \times 1 + 9$ とならないようにしている。これだとピンと来ないかな。 $15 \div 6 = 2 \cdots 3$ だけど、それを $15 \div 6 = 1 \cdots 9$ とはしないでね、って話。

q を、 a を b で割ったときの商、 r を余りという。

実は、今後着目したいのは「余り」について。整数をマスターする上でとても大事なのだ。

整数の話に入ったね！！

いよいよ数学 A の最後の章だよ！！



◇問題

1. 次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 168 252 (2) 84 126 630

2. $25!$ を計算すると、末尾には0が連続して何個並ぶか。

3. a 、 b は整数とする。 a を7で割ると3余り、 b を7で割ると4余る。このとき、次の数を7で割った余りを求めよ。

(1) $a + 2b$ (2) ab (3) a^4

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No.3

学習のねらい

合同式について理解しよう！

この内容は、教科書の”研究”のようなページに載っているもの。ただ、入試で、まああよく使うんだ。なので、入試までに一回やってみよう！！合同式の定義を紹介しよう。

m は正の整数とする。2つの整数 a 、 b について $a - b$ が m の倍数であるとき、 a と b は m を法として合同であるといい、式で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。これを合同式という。

これはつまり、 a を m で割った余りと、 b を m で割った余りが等しいということ。そしてこの合同式には以下のような性質がある。例えば、時計で $2 \equiv 14 \pmod{12}$ と表せるよね。(2時と14時は同じだよね。)

a 、 b 、 c 、 d は整数、 m 、 k は自然数とする。 $a \equiv c \pmod{m}$ 、 $b \equiv d \pmod{m}$ のとき

- (1) $a + b \equiv c + d \pmod{m}$
- (2) $a - b \equiv c - d \pmod{m}$
- (3) $ab \equiv cd \pmod{m}$
- (4) $a^k \equiv c^k \pmod{m}$

つまり、割り算以外、「 $\equiv$ 」と同じように計算できる。では、合同式を使うメリットを紹介しよう！

例) 101^{30} を100で割った余りを求めよ。

もちろん 101^{30} を計算するのはだるい。まずは、合同式を使わない方法をお見せしよう。といっても数学IIの二項定理の知識が必要なんだけどね。わからない人は「ふーん」で大丈夫！！

$101^{30} = (100 + 1)^{30} = {}_{30}C_0 100^{30} + {}_{30}C_1 100^{29} + \cdots + {}_{30}C_{29} 100 + {}_{30}C_{30}$ となるので、

${}_{30}C_0 100^{30} + {}_{30}C_1 100^{29} + \cdots + {}_{30}C_{29} 100 + {}_{30}C_{30} = 100(\sim\sim\sim) + {}_{30}C_{30}$ となり、 ${}_{30}C_{30} = 1$ なので、余りは1。(第1項～第30項はすべて100の倍数である。)

一方、合同式を使うと、

$101 \equiv 1 \pmod{100}$ となるので、 $101^{30} \equiv 1^{30} \equiv 1 \pmod{100}$ より、余りは1。

……かなり楽になったよね？ほぼ1行！ということで、便利さが伝わったかな？？問題を解いて慣れていこう！

合同式はマジで良いよ！！



◇問題

1. 合同式を利用して、次のものを求めよ。

13^{100} を 9 で割った余り

2. n は奇数とする。次のことを証明せよ。

(1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数である。

(2) $n^5 - n$ は 3 の倍数である。

3. m を整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) m^2 を 3 で割ったときの余りは何になるか。

(2) m^2 を 4 で割ったときの余りは何になるか。

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No. 4

学習のねらい

ユークリッドの互除法について理解しよう！

1. ユークリッドの互除法

例) 391 と 299 の最大公約数を求めよ。

みなさん、こう思いますよね。だるい！！！！と。その通り。そこで登場するのが、ユークリッドの互除法だ。

仕組みは、2つの自然数 a 、 b について a を b で割ったときの商を q 、余りを r とすると、 $a = bq + r$ が成り立つ。このとき、

$$(a \text{ と } b \text{ の最大公約数}) = (b \text{ と } r \text{ の最大公約数})$$

となる。今回の例ならば、 $391 = 299 \times 1 + 92$ なので

$$(391 \text{ と } 299 \text{ の最大公約数}) = (299 \text{ と } 92 \text{ の最大公約数})$$

これをさらに続けて、 $299 = 92 \times 3 + 23$ なので、

$$(299 \text{ と } 92 \text{ の最大公約数}) = (92 \text{ と } 23 \text{ の最大公約数})$$

さらに続けて、 $92 = 23 \times 4 + 0$ で、余りが0ということは、最大公約数は23ということになる。イメージは右の図である。

$$391 = 299 \times 1 + 92$$

$$299 = 92 \times 3 + 23$$

$$92 = 23 \times 4 + 0$$

この計算は筆算のようにやるとわかりやすい。

なぜ成り立つか？と言われるとなかなか難しくて……。このプリントでは証明はカットさせてもらうね……。

いつか必ず余りが0になる時が来るからそれまで筆算をし続けるわけだ。すると、最大公約数が求まるということだ。

$$\begin{array}{r} 4 \qquad 3 \qquad 1 \\ 23 \overline{) 92} \overline{) 299} \overline{) 391} \\ \underline{92} \qquad \underline{276} \qquad \underline{299} \\ 0 \qquad 23 \qquad 92 \end{array}$$

← 計算の流れ

2. 1次不定方程式の解の1つを求める

No.5 で1次不定方程式を扱う。 $ax + by = 1$ という式を解く時に、この式を満たす解 (x, y) をまず求める必要がある。その時に、ユークリッドの互除法を使うので、このプリントで、その部分だけ扱う。

例) $177x + 52y = 1$ を満たす整数 x 、 y の組を1つ求めよ。

総当たりしても良いんだけどなかなかだるい。まず互除法を使うと、

$$177 = 52 \times 3 + 21$$

$$21 = 177 - 52 \times 3$$

$$52 = 21 \times 2 + 10$$

$$10 = 52 - 21 \times 2$$

$$21 = 10 \times 2 + 1$$

$$1 = 21 - 10 \times 2$$

余りが1になるまで計算して移項する。あとは代入していくと、

$$1 = 21 - 10 \times 2 = 21 - (52 - 21 \times 2) \times 2 = 21 \times 5 + 52 \times (-2)$$

$$= (177 - 52 \times 3) \times 5 + 52 \times (-2) = 177 \times 5 + 52 \times (-17)$$

となるので、整数 x 、 y の組は、 $x = 5$ 、 $y = -17$ となる。

まあ、練習すればできるようになるよ！！頑張ろう！

◇問題

1. 以下の分数を約分せよ。

$$\frac{1009091}{1268651}$$

2. $73x - 51y = 3$ を満たす整数 x 、 y の組を1つ求めよ。

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No.5

学習のねらい

1 次不定方程式を解けるようになろう！

例えば、 $x + 5 = 2$ は x に入る値がただ 1 つに定まる。しかし、 $x + y = 6$ の場合、 x と y には無数に値が入る。このような方程式を不定方程式という。今回扱うのは、 $ax + by = c$ の形で表される 1 次不定方程式というもの。

例) $3x + 8y = 1$ を満たす整数解を求めよ。

一見、無数にあるくね？と思うが、実は少しだけ解が絞れる。まず、これを満たす解を 1 つ見つける。(No.4 の 2 で扱った。) これを特殊解という。

今回は、ユークリッドの互除法を使わなくてもわかるかな？ $(x, y) = (3, -1)$ で良いよね。そして、このように引き算してみよう。

$$\begin{array}{rcl} 3x + 8y & = & 1 \\ - &) & 3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) = 1 \\ \hline 3(x - 3) + 8(y + 1) & = & 0 \end{array}$$

すると、これは、 $3(x - 3) = -8(y + 1)$ となる。ここで、3と-8は互いに素だから、 $x - 3$ は8の倍数でないといけないよね。ということは、

$$x - 3 = 8k \quad (k \text{ は整数})$$

と表せるはず。これを代入すると、

$$3 \cdot 8k = -8(y + 1)$$

となるので、

$$y + 1 = -3k \quad (k \text{ は整数})$$

となる。

よって、 $x = 8k + 3$ 、 $y = -3k - 1$ (k は整数)となるわけだ。

これが解である。 $3x + 8y = 1$ という関係式が成り立っているので、 k を使ってちょっとだけ解が絞れるよねって話だ。

Topic—RSA 暗号

みなさんが普段使っているネットショッピングやログイン画面では、情報を安全に送るために暗号技術が使われている。その代表例の 1 つが RSA 暗号である。RSA 暗号では、とても大きな素数、最大公約数、1 次不定方程式、ユークリッドの互除法など、この章で学習していることが多く使われている。

例えば、 $7x + 40y = 1$ のような 1 次不定方程式を解くことで、暗号を元に戻すために必要な特別な数を求めることができる。この考え方は、実際に暗号を復号するための鍵の計算に利用されている。

この章で学んでいる整数の考え方は、実は世界中の通信を支えている。

◇問題

1. 次の方程式の整数解を全て求めよ。

(1) $9x + 5y = 1$ (2) $4x - 9y = 5$

2. 次の方程式の整数解を全て求めよ。

(1) $79x - 399y = 1$ (2) $37x - 90y = 4$

3. x 、 y を自然数とする。次の不定方程式を満たす整数解をすべて求めよ。

$$xy - 3x + 2y = 12$$

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No.6

学習のねらい

n 進法について理解しよう！

スマートフォンやパソコンは、写真・動画・ゲームなど、すべて数字で処理している。しかし、コンピュータは私たちのように 10 進法では数えていない。コンピュータが使っているのは、「あるか」「ないか」という二つだけ、つまり「0」と「1」だけで表す 2 進法を使っている。

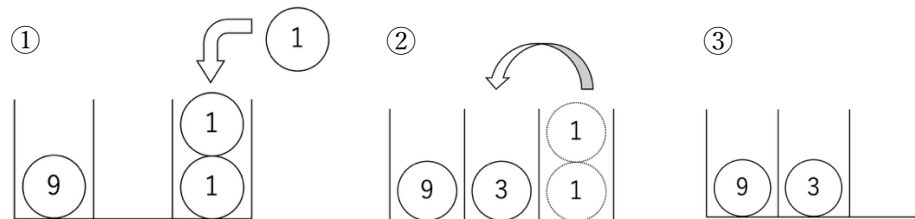
このような n 進法 (n には色々な数字が入る) の話をしていく。

まず、我々が普段の世界で使っている 10 進法。例えば、1964 という数字は、

$$1964 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

という数字である。

つまり、n 進法とは、 n^0 、 n^1 、 n^2 、…で出来上がっている数字ということだ。では具体的に 3 進法でイメージしてみよう。



今、102 という数字があったとしよう(①)(球の数を見ているよ)。そこに +1 することになった。すると、球がもう入らない!!そこで、1 のボ

ール 3 つをギュッととしてあげて、隣の位に移した(②)。結果、110 という数字になったということだ(③)。

このとき、3 進法なので、 $110_{(3)}$ と表すことがルール。具体的には、

$$110_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3^0 = 9 + 3 + 0 = 12_{(10)}$$

ということ。

例) $101101_{(2)}$ を 10 進法で表せ。

$$\begin{aligned} 101101_{(2)} &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 45 \end{aligned}$$

逆に、10 進法から n 進法にしたいときもある。では、 $91_{(10)}$ を 3 進法で表すにはどうしたら良いだろうか。91 以下の数字で最も大きい 3^n の位は、 3^4 である。

$$91 \div 3^4 = 1 \cdots 10$$

$$10 \div 3^3 = 0 \cdots 10$$

$$10 \div 3^2 = 1 \cdots 1$$

$$1 \div 3^1 = 0 \cdots 1$$

$$1 \div 3^0 = 0 \cdots 0$$

となるので、答えは、 $10100_{(3)}$ である。

これは右の図のような筆算でも考えられる。3 で割っていき、割れなくなったら終了。最後の商から「逆 L 字」で数を並べれば求められる。

		余り
3	$\overline{) 91}$	
3	$\overline{) 30}$	$\cdots 1$
3	$\overline{) 10}$	$\cdots 0$
3	$\overline{) 3}$	$\cdots 1$
	1	$\cdots 0$

◇問題

1. 次の数を 10 進法で表せ。

(1) $12021_{(3)}$ (2) $2043_{(5)}$ (3) $167_{(8)}$

2. 10 進数 78 を 2 進数で表すといくつになるか求めよ。

これにて数学 A 終了！！

お疲れ様！！

