

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No. 3

学習のねらい

合同式について理解しよう！

この内容は、教科書の”研究”のようなページに載っているもの。ただ、入試で、まああよく使うんだ。なので、入試までに一回やってみよう!!! 合同式の定義を紹介しよう。

m は正の整数とする。2つの整数 a 、 b について $a - b$ が m の倍数であるとき、 a と b は m を法として合同であるといい、式で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。これを合同式という。

これはつまり、 a を m で割った余りと、 b を m で割った余りが等しいということ。そしてこの合同式には以下のような性質がある。例えば、時計で $2 \equiv 14 \pmod{12}$ と表せるよね。(2時と14時は同じだよね。)

a 、 b 、 c 、 d は整数、 m 、 k は自然数とする。 $a \equiv c \pmod{m}$ 、 $b \equiv d \pmod{m}$ のとき

- (1) $a + b \equiv c + d \pmod{m}$
- (2) $a - b \equiv c - d \pmod{m}$
- (3) $ab \equiv cd \pmod{m}$
- (4) $a^k \equiv c^k \pmod{m}$

つまり、割り算以外、「 \equiv 」と同じように計算できる。では、合同式を使うメリットを紹介しよう！

例) 101^{30} を100で割った余りを求めよ。

もちろん 101^{30} を計算するのはだるい。まずは、合同式を使わない方法をお見せしよう。といっても数学IIの二項定理の知識が必要なんだけどね。わからない人は「ふーん」で大丈夫!!!

$101^{30} = (100 + 1)^{30} = {}_{30}C_0 100^{30} + {}_{30}C_1 100^{29} + \dots + {}_{30}C_{29} 100 + {}_{30}C_{30}$ となるので、

${}_{30}C_0 100^{30} + {}_{30}C_1 100^{29} + \dots + {}_{30}C_{29} 100 + {}_{30}C_{30} = 100(\sim\sim\sim) + {}_{30}C_{30}$ となり、 ${}_{30}C_{30} = 1$ なので、余りは1。(第1項～第30項はすべて100の倍数である。)

一方、合同式を使うと、

$101 \equiv 1 \pmod{100}$ となるので、 $101^{30} \equiv 1^{30} \equiv 1 \pmod{100}$ より、余りは1。

……かなり楽になったよね? ほぼ1行! ということで、便利さが伝わったかな? 問題を解いて慣れていこう!

合同式はマジで良いよ!!!



◇問題

1. 合同式を利用して、次のものを求めよ。

13^{100} を9で割った余り

2. n は奇数とする。次のことを証明せよ。

(1) $n^2 - 1$ は8の倍数である。

(2) $n^5 - n$ は3の倍数である。

3. m を整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) m^2 を3で割ったときの余りは何になるか。

(2) m^2 を4で割ったときの余りは何になるか。