

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No. 4

学習のねらい

ユークリッドの互除法について理解しよう！

1. ユークリッドの互除法

例) 391 と 299 の最大公約数を求めよ。

みなさん、こう思いますよね。だるい！！！！と。その通り。そこで登場するのが、ユークリッドの互除法だ。

仕組みは、2つの自然数 a 、 b について a を b で割ったときの商を q 、余りを r とすると、 $a = bq + r$ が成り立つ。このとき、

$$(a \text{ と } b \text{ の最大公約数}) = (b \text{ と } r \text{ の最大公約数})$$

となる。今回の例ならば、 $391 = 299 \times 1 + 92$ なので

$$(391 \text{ と } 299 \text{ の最大公約数}) = (299 \text{ と } 92 \text{ の最大公約数})$$

これをさらに続けて、 $299 = 92 \times 3 + 23$ なので、

$$(299 \text{ と } 92 \text{ の最大公約数}) = (92 \text{ と } 23 \text{ の最大公約数})$$

さらに続けて、 $92 = 23 \times 4 + 0$ で、余りが0ということは、最大公約数は23ということになる。イメージは右の図である。

$$391 = 299 \times 1 + 92$$

$$299 = 92 \times 3 + 23$$

$$92 = 23 \times 4 + 0$$

この計算は筆算のようにやるとわかりやすい。

なぜ成り立つか？と言われるとなかなか難しくて……。このプリントでは証明はカットさせてもらおうね……。

いつか必ず余りが0になる時が来るからそれまで筆算をし続けるわけだ。すると、最大公約数が求まるということだ。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 4 \\ \hline 23 \overline{) 92} \\ \underline{92} \\ 0 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r} 3 \\ \hline \overline{) 299} \\ \underline{276} \\ 23 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r} 1 \\ \hline \overline{) 391} \\ \underline{299} \\ 92 \end{array}
 \end{array}$$



計算の流れ

2. 1次不定方程式の解の1つを求める

No.5 で1次不定方程式を扱う。 $ax + by = 1$ という式を解く時に、この式を満たす解 (x, y) をまず求める必要がある。その時に、ユークリッドの互除法を使うので、このプリントで、その部分だけ扱う。

例) $177x + 52y = 1$ を満たす整数 x 、 y の組を1つ求めよ。

総当たりしても良いんだけどなかなかだるい。まず互除法を使うと、

$$177 = 52 \times 3 + 21 \qquad 21 = 177 - 52 \times 3$$

$$52 = 21 \times 2 + 10 \qquad 10 = 52 - 21 \times 2$$

$$21 = 10 \times 2 + 1 \qquad 1 = 21 - 10 \times 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{余りが1になるまで計算して移項する。あとは代入していくと、} \\
 1 = 21 - 10 \times 2 = 21 - (52 - 21 \times 2) \times 2 = 21 \times 5 + 52 \times (-2) \\
 = (177 - 52 \times 3) \times 5 + 52 \times (-2) = 177 \times 5 + 52 \times (-17)
 \end{aligned}$$

となるので、整数 x 、 y の組は、 $x = 5$ 、 $y = -17$ となる。

まあ、練習すればできるようになるよ！！頑張ろう！

◇問題

1. 以下の分数を約分せよ。

$$\frac{1009091}{1268651}$$

2. $73x - 51y = 3$ を満たす整数 x 、 y の組を1つ求めよ。