

数学 A 第 4 章 数学と人間の活動 No. 5

学習のねらい

1 次不定方程式を解けるようになるろう！

例えば、 $x + 5 = 2$ は x に入る値がただ1つに定まる。しかし、 $x + y = 6$ の場合、 x と y には無数に値が入る。このような方程式を不定方程式という。今回扱うのは、 $ax + by = c$ の形で表される 1 次不定方程式 というもの。

例) $3x + 8y = 1$ を満たす整数解を求めよ。

一見、無数にあるくね？と思うが、実は少しだけ解が絞れる。まず、これを満たす解を1つ見つける。(No.4の2で扱った。)これを特殊解という。

今回は、ユークリッドの互除法を使わなくてもわかるかな？ $(x, y) = (3, -1)$ で良いよね。そして、このように引き算してみよう。

$$\begin{array}{r} 3x + 8y = 1 \\ - \quad 3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) = 1 \\ \hline 3(x - 3) + 8(y + 1) = 0 \end{array}$$

すると、これは、 $3(x - 3) = -8(y + 1)$ となる。ここで、3と-8は互いに素だから、 $x - 3$ は8の倍数でないといけないよね。ということは、

$$x - 3 = 8k \quad (k \text{は整数})$$

と表せるはず。これを代入すると、

$$3 \cdot 8k = -8(y + 1)$$

となるので、

$$y + 1 = -3k \quad (k \text{は整数})$$

となる。

よって、 $x = 8k + 3$ 、 $y = -3k - 1$ (k は整数)となるわけだ。

これが解である。 $3x + 8y = 1$ という関係式が成り立っているので、 k を使ってちょっとだけ解が絞れるよねって話だ。

Topic—RSA 暗号

みなさんが普段使っているネットショッピングやログイン画面では、情報を安全に送るために暗号技術が使われている。その代表例の1つがRSA暗号である。RSA暗号では、とても大きな素数、最大公約数、1次不定方程式、ユークリッドの互除法など、この章で学習していることが多く使われている。

例えば、 $7x + 40y = 1$ のような1次不定方程式を解くことで、暗号を元に戻すために必要な特別な数を求めることができる。この考え方は、実際に暗号を復号するための鍵の計算に利用されている。

この章で学んでいる整数の考え方は、実は世界中の通信を支えている。

◇問題

1. 次の方程式の整数解を全て求めよ。

(1) $9x + 5y = 1$ (2) $4x - 9y = 5$

2. 次の方程式の整数解を全て求めよ。

(1) $79x - 399y = 1$ (2) $37x - 90y = 4$

3. x 、 y を自然数とする。次の不定方程式を満たす整数解をすべて求めよ。

$$xy - 3x + 2y = 12$$